EMBAJADA
DE ESPAÑA
EN ANDORRA

CONSEJERÍA DE EDUCACIÓN

ENTREMONTAÑA en el aula

Cuadernos de Matemáticas
Instituto Español de Andorra
3

'09

educacion.es

ENTREMONTAÑA
en el aula

CUADERNOS DE MATEMÁTICAS

Departamento de Matemáticas
Instituto Español de Andorra

MINISTERIO DE EDUCACIÓN
Dirección General de Relaciones Internacionales
Subdirección General de Cooperación Internacional
Consejería de Educación. Embajada de España en Andorra

Edita:
© SECRETARÍA GENERAL TÉCNICA
Subdirección General de Documentación y Publicaciones

DIRECCIÓN
Bartolomé Bauzá Tugores
Consejero de Educación de la Embajada de España en Andorra

COORDINACIÓN Y ASESORÍA TÉCNICA
Carmen Pérez-Sauquillo Conde

AUTORES
Luis Béjar
Raquel Vallés
Enrique Salazar
Jaime Gil
Margarita García de Cortázar
Enrique del Río
Carmen Castro

COMPOSICIÓN Y MAQUETACIÓN
Celia Borrallo Vázquez

COORDINACIÓN GRÁFICA
Juan Zafra Camps

ILUSTRACIÓN PORTADA
alumno Insituto Español curso 2007/2008

Catálogo de publicaciones del Ministerio
www.educacion.es
Catálogo general de publicaciones oficiales
www.060.es
Texto completo de esta obra:
www.educacion.es/exterior/ad/es/publicaciones

NIPO: 820-10-001-4
ISBN: 978-99920-1-657-2
Depósito legal: AND483-2007

ANDORRA, DICIEMBRE DE 2009

Sumario

Presentación

¡Ah, quién pudiera volver a la escuela y estudiar matemáticas como proponen estos siete profesores! ¡Cuánto disgusto se hubiera evitado! ¡Cuántas carreras habrían llegado a su fin!

Los paraísos de mi infancia hubieran sido más paraísos de no haber existido la clase de matemáticas (y algo más tarde, la de física). Y la pesadilla, la frustración, el esfuerzo errático que supuso esta asignatura para mí, lo supuso también para la mayoría de los niños de entonces, con excepciones afortunadas. Y ha sido debido a la labor de las nuevas generaciones de profesores de matemáticas (y de física) que de la oscuridad de aquellos años se haya pasado a la luz de ahora, que de la resolución descarnada de problemas, mediante la aplicación de áridas fórmulas, se invite ahora a la reflexión, la creatividad, la duda, la pregunta.

Este tercer número de ENTREMONTAÑA se publica solo en versión digital, a pesar de la querencia que esta Consejería siente por el formato papel. Restricciones presupuestarias y la falta de patrocinio nos han obligado a este único tipo de versión. Confiamos, no obstante, que el efecto sobre el profesorado de matemáticas alcance la intensidad que merecen las propuestas que presentamos, por ajustadas, útiles y entretenidas: del jerogífico egipcio a la receta de cocina, de la invitación a investigar al rompecabezas de teselas, de las aplicaciones matemáticas de las nuevas tecnologías a la misteriosa longitud de la línea… Y por encima de todo, el paso acorde del profesor tutor y acompañante, por fin reivindicado.

Gracias Carmen, Enrique, Jaime, Luis, Margarita, Raquel y de nuevo Enrique. Muchas gracias.

Bartolomé Bauzá Tugores
Consejero de Educación

Matemáticas en la cocina

Luis Béjar

El conjunto de actividades que se presentan a continuación surgen para dar respuesta a una pregunta recurrente en el alumnado de todas las edades y que todos los profesores hemos recibido alguna vez; "profe, y esto ¿para qué sirve?". Posiblemente sea la pregunta más importante a la que se enfrenta un docente, si la respuesta no es satisfactoria, el alumno perderá la motivación y con ella todo intento para que aprenda la asignatura será inútil. La formulación de esta pregunta es todo un síntoma de la enfermedad subyacente; el alumno no relaciona las matemáticas con su vida real. Y es que con mayor frecuencia de la deseable, no somos capaces de reconciliar las matemáticas con la vida cotidiana y nuestros alumnos perciben lo aprendido en clase como algo independiente de su vida fuera de las aulas. Lógicamente, el alumno se pregunta para qué sirve lo que aprende en clase si luego no lo utiliza en ninguna situación real. Estas actividades, son por tanto un intento de conectar lo que se aprende en clase con su aplicación en nuestro ambiente habitual. Las matemáticas nos rodean por todos lados y las utilizamos inconscientemente a cada momento, números, euros, litros, deudas, ahorros, facturas, el cambio en la tienda, alquileres… Acercar nuestras clases a la resolución de los problemas que surgen a diario es una de nuestras más importantes tareas.

La elección de la cocina como eje conductor de las actividades que se presentan es muy fácil de entender. Pocas cosas hay tan cotidianas como la cocina de la casa, hacer la comida para la familia o realizar la compra diaria. En todas ellas las matemáticas ocupan un lugar destacado y con las actividades que se proponen, el alumno comprenderá la estrecha relación que une las clases de matemáticas y la vida cotidiana.

Material:

Recetas de cocina.

Actividad 1. Unidades de medida.

Introducción.

En esta actividad se trabajan los conceptos de magnitudes y unidades de medida. Se hará especial hincapié en la diferencia entre lo que se quiere medir (magnitud) y lo que utilizamos para realizar esa medida (unidad de medida). Así mismo orientaremos al alumno sobre la conveniencia de establecer un patrón universal para medir (sistema métrico decimal), de modo que la medida de una magnitud proporcione un valor entendido por todos. Después de tratar las ventajas del empleo de un sistema métrico, el alumno puede entender que en diferentes ámbitos un sistema métrico resulte más conveniente que otro, lo que explica la aparición de unidades de medida tan características de la cocina como la cucharada, el chorro, el pellizco… En relación con estas unidades de medida, la actividad termina introduciendo el concepto de exactitud. El profesor guiará a los alumnos para que reflexionen sobre la importancia de seguir una serie de instrucciones de forma ordenada y cuidadosa para conseguir con éxito el objetivo marcado, que en este caso es la elaboración de la receta.

Pasos a realizar:

1. Lee la receta del Anexo 1 y señala todas las magnitudes y las unidades de medida que se utilizan.

2. Escribe en tu cuaderno una columna con las magnitudes y en otra las unidades de medida que aparecen en la receta.

3. Une con flechas las magnitudes con las unidades que se utilizan para medirla.

4. Indica cuales de esas medidas son del sistema decimal y cuáles no.

5. Discute las ventajas e inconvenientes de utilizar medidas del sistema decimal o utilizar otro tipo de unidades de medida en la cocina (¿es mejor usar una cucharada o un decilitro?).

6. En grupo, reflexiona sobre las siguientes cuestiones: todas las unidades de medida indican una cantidad exacta o alguna es aproximada. Por qué en algunos ingredientes nos indican una cantidad exacta y en otros una cantidad aproximada. Saldría bien la receta usando cantidades aproximadas en todos los ingredientes, solo se puede hacer en algunos o hay que ser exacto en todos.

Actividad 2. Proporciones.

Introducción.

Con la segunda actividad se trabajan los conceptos de proporciones y de magnitudes directamente proporcionales. Se debe prestar atención a la dificultad que presentan los alumnos para entender que dos magnitudes directamente proporcionales no solo aumentan en la misma proporción sino que también disminuyen en la misma proporción. También se seguirá remarcando la diferencia entre magnitud y unidad de medida. Por último, debe dejarse claro que no todas las magnitudes están relacionadas de forma directamente proporcional, puede que estén relacionadas de otra forma o que no exista ninguna relación entre ellas. Se puede aprovechar para introducir el concepto de magnitudes inversamente proporcionales, aunque no se trabajará con él en esta actividad.

Pasos a realizar:

1. Lee atentamente la receta del Anexo 2.

2. Discute por qué la receta indica el número de personas. Razona si debo utilizar los mismos ingredientes para diferente número de personas, y ¿la misma cantidad de cada ingrediente?

3. Si deseo cocinar para la mitad de personas, ¿qué cantidad debo usar de cada ingrediente? ¿Cómo podemos calcular esa cantidad? Calcula la cantidad de ingredientes necesarios.

4. Calcula la cantidad que debo utilizar de cada ingrediente si cocino para el doble de personas.

5. Repite el apartado anterior si cocino para el triple de personas.

Actividades de ampliación:

1. Elabora una tabla indicando la cantidad de cada ingrediente necesario para elaborar la receta para 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 10 y 20 personas.

2. ¿Los ingredientes necesarios para realizar la receta y el número de personas están relacionados de alguna forma? ¿Ocurre lo mismo con la cantidad utilizada de cada ingrediente y el número de personas? ¿Qué ocurre con la cantidad de cada ingrediente al aumentar el número de comensales? Y ¿al disminuir el número de comensales?

3. La relación entre las personas y el tiempo de elaboración, ¿es del mismo tipo que la estudiada en el apartado anterior?, y ¿con las personas y el tiempo de cocción?

Actividad 3: Realizar la compra.

Introducción.

El siguiente paso para la elaboración de la receta, una vez elegida y tras haber calculado los ingredientes que necesitamos es comprarlos. Una de las actividades más cotidianas y naturales en cualquier familia es realizar la compra. Seguiremos trabajando las proporciones calculando el coste de cada ingrediente y de la receta completa. En esta actividad, además se utilizaran diferentes tablas para organizar y analizar la información. Se pretende que los alumnos tomen conciencia de la importancia de las matemáticas para realizar una compra económica. Del mismo modo reflexionarán sobre el precio relativo de un alimento dependiendo de su clase y cantidad (el ingrediente por el que menos dinero paguemos, puede ser en proporción el más caro, como ocurre con las trufas, el azafrán…)

Pasos a realizar:

1. Escribe en una lista los ingredientes que necesitamos para realizar la receta y la cantidad.

2. Visita el supermercado o la tienda de alimentación más cercana y confecciona una tabla de la siguiente forma:

a. En la primera columna escribe el nombre de los ingredientes que te hacen falta.

b. En la segunda columna escribe el precio y la cantidad de producto para cada ingrediente en la tercera.

Puede servirte de ayuda la siguiente tabla de ejemplo.

Ingrediente	Precio	Cantidad (gr, l, unidades…)
Ingrediente 1		
Ingrediente 2		
Ingrediente 3		

3. Ordena los ingredientes por su precio, desde el más barato al más caro. ¿Cuál es el más económico?

4. Calcula el precio de cada ingrediente para una cantidad determinada de producto (utilizando las unidades de medida apropiadas). Para ello elabora y completa unas tablas similares a la siguientes con todos los ingredientes de tu lista. Incluye la en una de las columnas la cantidad exacta indicada en la receta de cada ingrediente:

	Cantidad (gr)	50	100	150	250	400	1000	2500
Ingrediente 1	Precio (€)							
Ingrediente 2	Precio (€)							

	Cantidad (litros)	0,2	0,5	0,8	1	1,25	1,5	2
Ingrediente 3	Precio (€)							
Ingrediente 4	Precio (€)							

	Cantidad (unidades)	1	2	3	5	8	10	15
Ingrediente 5	Precio (€)							
Ingrediente 6	Precio (€)							

5. Fíjate ahora en todos los ingredientes cuya cantidad se expresa en gramos. Elije un peso cualquiera. Ordena esos ingredientes del más caro al más barato. ¿Están en el mismo orden que en el apartado 2?

6. Repite el apartado anterior para los ingredientes cuya cantidad se expresa en litros y para los que se expresa en unidades.

7. Ahora nos quedaremos con la columna que representa la cantidad exacta del ingrediente necesaria para elaborar nuestra receta. Ordena de más caro al más barato los ingredientes de la receta. ¿Obtienes los mismos resultados que en apartados anteriores?

8. Busca el precio de este plato en un restaurante y compáralo con el dinero que nos cuesta hacerlo en casa. ¿Cuál es la diferencia de dinero? ¿A qué se debe esa diferencia?

Actividad de ampliación:

1. Escribe en una lista los ingredientes que necesitamos para realizar la receta y la cantidad.

2. Visita el supermercado o la tienda de alimentación más cercana y confecciona una tabla de la siguiente forma:

a. En la primera columna escribe el nombre de los ingredientes que te hacen falta.

b. En la segunda columna escribe el precio y la cantidad de producto de una marca o clase determinada para cada ingrediente.

c. En la tercera columna repite el apartado anterior para otra marca.

Puede servirte de ayuda la siguiente tabla de ejemplo.

Ingrediente	Marca 1		Marca 2	
	Precio	Cantidad (gr, l, unidades…)	Precio	Cantidad (gr, l, unidades…)
Ingrediente 1				
Ingrediente 2				
Ingrediente 3				

3. Ordena los ingredientes por su precio, desde el más barato al más caro. Para cada ingrediente, ¿Cuál es la marca más económica?

4. Calcula el precio de cada ingrediente para una cantidad determinada de producto (utilizando las unidades de medida apropiadas). Para ello elabora y completa una tabla similar a la siguiente con todos los ingredientes de tu lista. Incluye la en una de las columnas la cantidad exacta indicada en la receta de cada ingrediente:

Ingrediente 1	Cantidad (gr)	50	100	150	250	400	1000	2500
	Precio (€) Marca 1							
	Precio (€) Marca 2							
Ingrediente 2	Cantidad (litros)	0,2	0,5	0,8	1	1,25	1,5	2
	Precio (€) Marca 1							
	Precio (€) Marca 2							

Ingrediente 3	Cantidad (unidades)	1	2	3	5	8	10	15
	Precio (€) Marca 1							
	Precio (€) Marca 2							

5. Fíjate ahora en todos los ingredientes cuya cantidad se expresa en gramos. Elije un peso cualquiera. Ordena esos ingredientes del más caro al más barato. ¿Están en el mismo orden que en el apartado 4?

6. Repite el apartado anterior para los ingredientes cuya cantidad se expresa en litros y para los que se expresa en unidades.

7. Busca el precio de este plato en un restaurante y compáralo con el precio de hacerlo en casa. Cuánto dinero es la diferencia, porque esa diferencia de precios. (pagar cocinero, camarero, establecimiento…)

Actividad 4. Elaboración de la receta:

Introducción.

La elaboración de la receta sirve para trabajar procedimientos y actitudes útiles en matemáticas y en general en cualquier asignatura. La comprensión de textos, el orden, la limpieza, la atención y concentración en una o varias actividad que en ocasiones pueden ser simultaneas. La capacidad de improvisación, la toma de decisiones y de discriminación entre lo imprescindible, lo importante y lo superfluo. Valorar la importancia de la práctica y la experiencia (no será lo mismo realizar la receta por primera vez que después de varios intentos). Además se trabajará la organización de la información, para lo que se pedirá la elaboración de una ficha. Lo ideal sería poder realizar la receta en el centro educativo, para que el profesor pueda trabajar todos estos aspectos directamente con los alumnos. Además se fomentaría el trabajo en equipo y el compañerismo. Si no fuera posible, se pedirá la colaboración de las familias para que ayuden a sus hijos en la elaboración de la receta en casa y posteriormente en el aula se hablará en grupo sobre la experiencia de cada alumno.

Pasos a realizar:

1. En clase se elegirá una receta para que todos los alumnos realicen en casa con ayuda de sus familias.

2. Realiza una ficha indicando todo lo que has hecho paso a paso. Debes incluir: número de personas para las que has cocinado, cómo has calculado la cantidad de ingredientes necesarios, en qué orden has realizado las tareas y si has podido simultanear más de una al mismo tiempo, qué problemas has encontrado y cómo los has resuelto, cuánto tiempo has tardado en todo el proceso, cual ha sido el tiempo de cocción de los alimentos.

3. Compara el resultado con el de tus compañeros. Siguiendo la misma receta son todos los platos iguales, tienen el mismo sabor. ¿Por qué se producen las diferencias?

4. Por grupos reflexiona y discute los siguientes puntos; has seguido al pie de la letra la receta o la has modificado, importaba la exactitud, hay cosas en las que importa menos y otras más, por qué ocurre esto. Hay algún ingrediente que pueda suprimirse o sustituirse por otro, hay alguno que no pueda modificarse. En alguno puedes modificar de cantidad más que otro. El tiempo de cocción puede variarse ¿por qué?

Anexo 1. Receta para la Actividad 1.

Bacalao con nata. Plato típico portugués.

Comensales:

6 comensales

Tiempo de preparación:

45 minutos

Ingredientes:

- 700 gr. bacalao en salazón
- 5 ó 6 gr. patatas
- 5 cucharadas de aceite de oliva
- 3 cebollas
- Pimienta negra
- Sal
- 40 gr. Mantequilla
- 2 cucharadas de harina
- 600 cc. Leche
- 300 cc. crema de leche (nata)
- 1 hoja de laurel

Elaboración:

Desala el bacalao en agua fría durante 24 horas, cambiando el agua varias veces. Como hace calor mejor remojarlo dentro del frigorífico. Una vez desalado correctamente, quita la piel y espinas, troceando la carne en tiras finas, con los dedos.

Pela y corta las patatas en rodajas finas (panaderas). Sofríe las patatas en 3 cucharadas de aceite de oliva, hasta que se doren. Aparta, escurre y reserva. Saltea las cebollas en el resto del aceite, en rodajas finas, hasta que queden transparentes. Añade el pescado y adereza con pimienta negra al gusto y una pizca de sal. Reserva.

Prepara la salsa calentando la mantequilla hasta que se derrita, en un cazo. Añade dos cucharadas soperas de harina, remueve unos segundos y ve añadiendo la leche poco a poco, removiendo. Cuando rompe a hervir añade la nata y aparta.

Ponemos el bacalao con las cebollas en el fondo de una fuente de horno. Cubre con las patatas salteadas y la salsa de nata. Añade la hoja de laurel y hornea 30 minutos a horno suave, a unos 180º.

Anexo 2. Receta para la Actividad 2.

Leche frita.

Comensales:

6 comensales

Tiempo de preparación:

30 minutos

Ingredientes:

- Medio litro de leche
- 40 gr de mantequilla
- 200 gr de harina
- 250 gr de azúcar
- 6 huevos
- 1 palito de canela en rama
- 1 corteza de limón
- Canela en polvo
- Aceite de oliva

Elaboración:

En una cazuela poner la leche con la corteza del limón y la canela, cuando empiece a hervir, retirarla del fuego, colarla con un colador fino.
En otra cazuela, colocada a fuego lento, fundir la mantequilla y añadir la harina removiendo constantemente, para que no se hagan grumos. Añadir entonces la leche colada, poco a poco y removiendo constantemente, con una cuchara de palo. Echar entonces tres yemas de huevo bien batidas, sin dejar de remover con energía, para que se mezcle todo de forma homogénea y evitar que se cuajen. Echar entonces el azúcar y continuar la cocción, a fuego muy lento, removiendo, hasta que la mezcla esté bastante espesa.

Preparar un molde rectangular, aceitarlo y distribuir la crema de forma homogénea de manera que tenga un espesor de unos 2 centímetros. Colocar el molde en sitio fresco y esperar a que solidifique. Entonces cortarla en cuadrados de unos 5 centímetros de lado.

Poner al fuego una sartén con abundante aceite y cuando esté bien caliente ir friendo los cuadrados que previamente se habrán pasado por huevo batido y después por harina. Cuando estén dorados sacarlo y escurrirlos bien del aceite. Colocarlos en una bandeja y espolvorearlos con azúcar y canela en polvo.

De la Alhambra a la Margineda de la mano de Escher

Raquel Vallés Sierra

¿En cuántas ocasiones nuestros alumnos pueden echar a volar su imaginación mientras trabajan en matemáticas? ¿Y echar mano de su creatividad? ¡Y qué pocas veces pueden decir que les "ha quedado bonito"! Pero, ¿bonito hasta el extremo de montar con ello una exposición?

Esa experiencia fue la que vivieron el último trimestre del curso 2007/2008 un grupo de alumnos, en su mayoría de 2º de ESO del Instituto Español de Andorra (sito en La Margineda) en la asignatura de **taller de matemáticas** (predecesora de las actuales matemáticas básicas).

Se trataba de crear mosaicos partiendo de la inspiración de los que podemos disfrutar en las paredes de la Alhambra de Granada, así como de las originalidades del holandés M.C. Escher (1898-1972), uno de los más reconocidos artistas gráficos del siglo XX.

Imagen 1

En aquel momento, partiendo de algo tan simple como la idea de que el plano se tesela con triángulos, cuadrados o hexágonos, de unos cuantos razonamientos más y de un trabajo de creatividad nada despreciable, llegamos a disfrutar de un "puñadito" de trabajos, que conformaron una exposición realmente interesante.

Ahora, el objetivo es detallar, paso a paso, mediante actividades guiadas, todo el proceso para la elaboración de mosaicos como los nombrados anteriormente. ¡Vamos allá!

Actividad 0.

Realmente no es una actividad, por eso lo de numerarla con el cero. Se trata de buscar previamente a las actividades propiamente dichas, una forma atractiva de motivar al alumnado.


Imagen 2

Ilustraciones de los mosaicos Nazaríes (especialmente los de la Alhambra) y de los trabajos de Escher, son una forma estupenda de motivación. Según las circunstancias puede ser conveniente un vídeo, unas diapositivas, unas páginas webs o simplemente un libro.

La página web oficial de Escher cuenta, en su galería de imágenes, con un apartado dedicado a este tipo de dibujos simétricos. A la vista de sus mosaicos de los enanos, los reptiles, los cisnes, los jinetes y muchos otros, es interesante preguntarles cómo creen que los hizo su autor. Las respuestas a menudo quedan distantes de la realidad, y los propios alumnos se van dando cuenta de lo disparatado de sus contestaciones, a medida que van avanzando en el proceso de crear su propio mosaico.

Les resulta muy bonito lo que ven, y si les preguntas si serían capaces de hacer algo parecido, la respuesta mayoritaria es que no. Es este el momento de decirles: "¿No? Pues ya veréis como sí, porque esto es justo lo que haremos en los próximos días".

Actividad 1.

El objetivo de esta actividad es concluir que solamente los polígonos regulares de 3, 4 y 6 lados, teselan el plano.

Para el último ciclo de Educación Primaria puede resultar interesante utilizar un material, que ya está comercializado, de polígonos de plástico de colores que son ensamblables, que se utilizan generalmente para formar con ellos poliedros, pero, en esta ocasión, lo utilizaremos con otra finalidad. Manipulando el material descubrirán que los triángulos equiláteros teselan, que los cuadrados también, que los pentágonos regulares dejan un hueco y por tanto no teselan, y que los hexágonos regulares, que son la unión de 6 triángulos equiláteros, también teselan. Quizás sería mucho pedir que se plantearan lo que ocurre con los heptágonos, octógonos, etc, porque para ello, tendrían que hacer deducciones a cerca de la medida de los ángulos interiores de los polígonos regulares. Lo que sí que podrían hacer es medir el ángulo interior de los polígonos (triángulos equiláteros, cuadrados y hexágonos regulares) con el transportador de ángulos y comprobar que, sumando varios iguales se llega a cubrir exactamente 360 grados.

En Educación Secundaria, si bien el material de los polígonos puede ser útil en un principio, convendría que los alumnos dedujeran los valores de los ángulos interiores de los polígonos regulares y, a partir de aquí, obtuviesen sus propias conclusiones sobre los que teselan el plano y los que no. Esta batería de preguntas los encaminaría paso a paso al objetivo.

1. ¿Qué es un polígono?
2. ¿Qué es un polígono regular?
3. ¿Qué nombres reciben los polígonos regulares según el número de lados?
4. ¿Qué son los ángulos interiores de los polígonos?
5. ¿Cuánto mide cada uno de los ángulos interiores de un triángulo equilátero?(1)
6. ¿Cuánto mide cada uno de los ángulos interiores de un cuadrado? ¿y de un pentágono regular? ¿y de un hexágono regular? (2) (3)
7. De las medidas anteriores, ¿cuáles son divisores de 360, que es el número de grados de una circunferencia?
8. ¿Con cuáles de los polígonos anteriores, unidos por sus vértices y lados, se consigue teselar el plano, es decir rellenar sin huecos ni solapamientos?

Aclaraciones:

(1) Es muy ilustrativo hacer con ellos la experiencia de dibujar un triángulo en un papel y colorear en tres colores diferentes los tres ángulos. Luego cortamos el triángulo en tres trozos en los que en cada uno de ellos quede un ángulo. Finalmente, unimos estos trozos por los vértices de los ángulos de forma que la unión de los tres forme el ángulo llano. Por supuesto que pueden utilizar el transportador de ángulos, pero la idea es que lo utilicen después de sus razonamientos y sus hipótesis, para verificar si estaban en lo cierto o no.

(2) Hay que hacerles ver, dibujando las diagonales, el número de triángulos que contiene cada polígono. También pueden usar aquí el transportador de ángulos para hacer las comprobaciones.

(3) En función de las expectativas del profesor, del tiempo del que se disponga, de la capacidad de abstracción del alumnado, de sus conocimientos previos, etc, se podría añadir esta otra pregunta: "¿y, en general, de cualquier polígono regular de **n** lados?". No obstante, eliminando esta pregunta también seguirían llegando a cumplir el objetivo de esta actividad.

Esta actividad se puede hacer de manera individual, aunque considero que es más productiva en pequeño grupo (2 ó 3 alumnos) porque propicia la discusión sobre cuestiones matemáticas. La puesta en común del trabajo de cada grupo no es interesante desde el punto de vista de que todos deben llegar a las mismas conclusiones. Sin embargo, sí lo sería si algún grupo por error hubiese llegado a conclusiones diferentes a las de otro. Defender la postura propia frente a la de los otros, argumentando, es un buen aprendizaje para muchas situaciones de la vida, no sólo para el aula.

Actividad 2

El objetivo de esta actividad es, a partir de las figuras que sabemos que teselan el plano, realizar transformaciones hasta conseguir la tesela deseada, es decir, el modelo de figura con el que recubriremos el plano.

Para Educación Primaria, aunque el alumnado ya ha deducido de la actividad anterior, con más o menos ayuda, que hay 3 polígonos regulares que teselan el plano, a partir de ahora, centraría su atención sólo en el cuadrado. El motivo principal es que las transformaciones en el cuadrado son, a mi juicio, más fáciles que en el triángulo. El hexágono es similar al cuadrado en cuanto a dificultad pero como tiene dos lados más que el cuadrado, el trabajo les llevará más tiempo. Además el alumnado encontrará más "familiar" la figura del cuadrado que la del hexágono.

Para Educación Secundaria, salvo que la duración de la actividad no lo permitiera, sí es conveniente trabajar sobre los 3 polígonos estudiados.

En Educación Primaria, se podría facilitar ya al alumnado el cuadrado dibujado para empezar a hacer sobre él las transformaciones. En Educación Secundaria, podemos, o bien facilitar el dibujo del polígono (triángulo, cuadrado o hexágono) que queremos que transformen, o bien pedirles, con la ayuda de la regla y el compás, que los construyan ellos mismos.

En función de la profundidad con la que se quiera hacer la actividad, se pueden estudiar movimientos en el plano, de los que se hablará posteriormente, de manera intuitiva, o bien utilizando rigurosamente la notación matemática. Esta última opción, no es recomendable para los alumnos de primaria, ni incluso, a mi juicio, para los primeros cursos de secundaria.

De la misma forma que la actividad 1 es de razonamiento y descubrimiento del alumnado, la recomendación es que esta segunda actividad sea presentada por el profesor, y no abierta a la investigación de los alumnos.

Internet ofrece páginas interesantes en las que ver en movimiento las transformaciones a realizar. Esta opción es muy atractiva y muy clara. Otra alternativa es explicar, método tradicional, tizas de colores en mano, estos movimientos.

Las maneras de transformar no son únicas para cada polígono, y es cuestión del profesor presentar varias de las formas posibles o elegir sólo una de ellas para cada polígono. Yo he optado aquí por lo segundo. A continuación se muestra paso a paso un tipo de transformación para cada uno de los polígonos regulares que teselan el plano.

2.1. Transformaciones en el triángulo equilátero

1. Elegimos un lado del triángulo y localizamos su punto medio.
2. En la mitad del lado hacemos la transformación deseada, hacia el interior o el exterior de la figura.
3. Esa transformación la giramos 180º, con centro el punto medio.
4. Repetimos los tres pasos anteriores en los otros dos lados.

Por supuesto, cada lado puede tener una transformación diferente, o incluso, alguno de los lados podría mantenerse sin transformación. La siguiente imagen, la conocida como "pajarita" de los mosaicos de la Alhambra, ilustra el proceso de transformación anteriormente descrito.

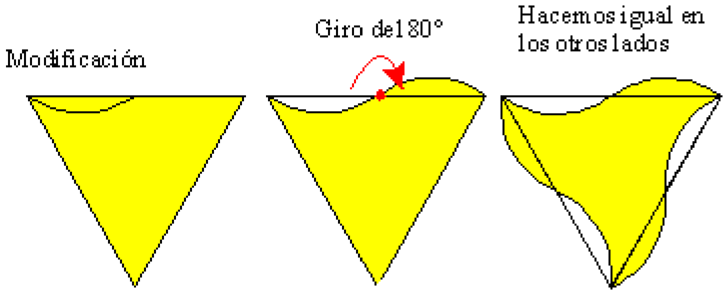


Imagen 3

A continuación se muestra otra ilustración como ejemplo de la transformación de un triángulo. La primera imagen es la que se obtiene finalizada esta actividad 2. La segunda y tercera imagen es el resultado de la actividad 3 que veremos más adelante.

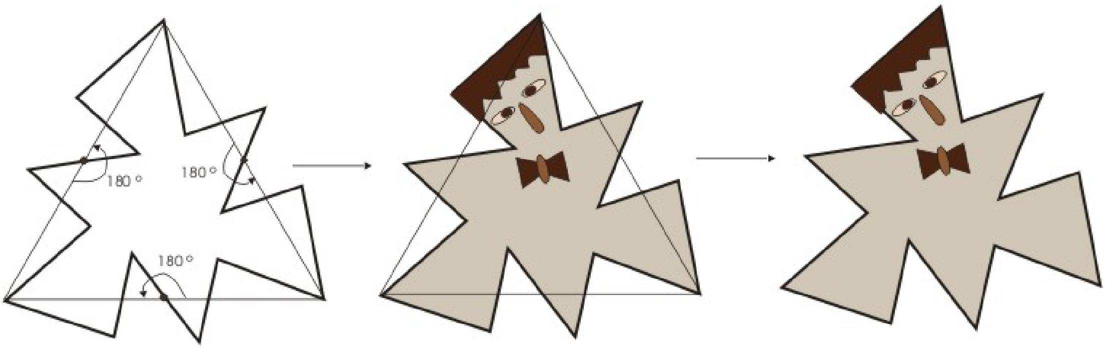


Imagen 4

2.2. Transformaciones en el cuadrado

1. Elegimos un lado del cuadrado y hacemos en él la modificación deseada.
2. Sobre uno de los extremos del lado hacemos un giro de 90º hacia el interior del cuadrado (o lo que es lo mismo, de 270º hacia el exterior).
3. Repetimos el proceso con el lado opuesto al de partida, haciendo el giro sobre el vértice opuesto al del primer giro.

Al igual que en el caso del triángulo, cada pareja de lados puede tener una transformación diferente, o incluso, alguna podría no tenerla. El siguiente proceso de transformación, que es uno de los más conocidos de la Alambra ("el hueso"), puede servir para aclarar estos pasos.

2.3. Transformaciones en el hexágono regular

1. Elegimos un lado del hexágono y hacemos en él la modificación deseada.
2. Sobre uno de los extremos del lado hacemos un giro de 120º hacia el interior del hexágono (o lo que es lo mismo, de 240º hacia el exterior).
3. Repetimos el proceso, dos veces, con los lados contiguos a los que han llegado las anteriores modificaciones, de manera que los giros se hagan sobre tres vértices alternos.

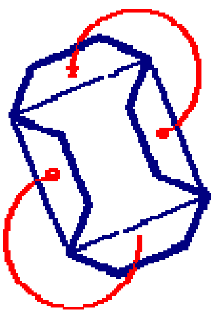


Imagen 5

Se puede observar como el proceso de transformación del cuadrado y del hexágono son similares. Por este motivo he considerado suficiente ilustrar ambos con un sólo ejemplo para cada uno, mientras que para el triángulo, considerando que tiene una transformación más compleja, he creído conveniente utilizar dos ejemplos.

En el caso del hexágono, la transformación que nos sirve de ejemplo, es una de las que conformaron la exposición en el Instituto Español de Andorra. En la imagen podemos observar cómo las transformaciones anteriormente citadas darían como resultado el contorno en tinta negra. En este caso cada pareja de lados tiene una transformación diferente, pero también podría ser en algún caso la misma, o incluso, no tener transformación en alguna de las parejas de lados.

En todas las transformaciones descritas anteriormente hay que tener en cuenta, no sobrepasar con la transformación de uno de los lados, la realizada en el otro, ya que el objetivo es borrar el polígono de partida y quedarnos con la figura resultante de las transformaciones de los lados, y esta figura resultante no puede estar "atravesada" por sí misma.

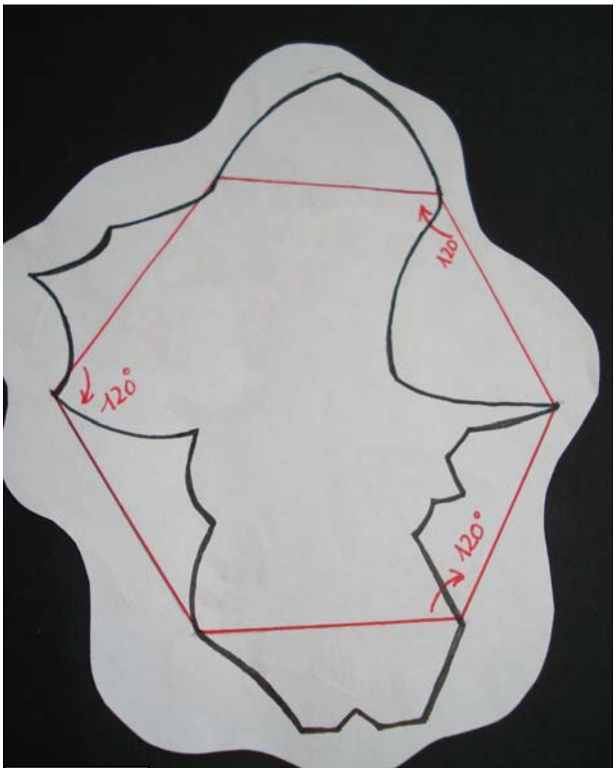


Imagen 6

Tanto en el caso del triángulo, como en el del cuadrado y en el del hexágono, la dificultad está, en ocasiones, en conseguir que el trazo realizado sobre un lado, se realice exactamente igual, después de la transformación correspondiente. Una forma fácil de solventar esta cuestión es seguir el siguiente proceso:

(1) Realizar el trazo.
(2) Poner papel cebolla (o simplemente un folio que no sea muy grueso) por encima y calcarlo.
(3) Con la ayuda de la ventana, calcar en la posición adecuada el trazo del papel cebolla.

El alumnado a menudo se pregunta, y preguntan al docente, ¿cómo tienen que hacer los trazos, en qué figura tienen que pensar, con qué forma? La respuesta adecuada, aunque nos resulte extraña, es "no hay que pensar, sólo hay que hacer". No es bueno tener ninguna idea predeterminada de lo que se quiere conseguir. Si conseguimos que nos hagan caso, veremos lo creativa, imaginativa y divertida, que puede ser la actividad siguiente.

Actividad 3.

Estamos ahora ante el resultado de la actividad 2, que es una "figura extraña" fruto de la transformación del polígono original. Pues bien, este es el momento de echar a volar la imaginación. Se trata de mirar, desde cualquier posición, lo que nos sugiere esa "extraña figura", que de momento es sólo un espacio en blanco. Para unos ese espacio en blanco puede ser un pez sin más que dibujar un ojo, unas escamas, etc. Para otros puede ser la cara de un señor con una boina, y un pañuelo al cuello. Posibilidades infinitas las de la imaginación ante el papel blanco.

Si la creatividad de un alumno descubre la imagen escondida en su "extraña figura", se pondrá manos a la obra a rotular el contorno, y dibujar todo lo que haya imaginado, hasta que todos lo puedan "ver". No es todavía momento de dar color. Lo podemos hacer, si queremos, pero de momento será trabajo perdido. Si nuestra imaginación no consigue darle vida a esa "figura extraña", el remedio es fácil, borrar y comenzar de nuevo, es decir, volver a repetir los pasos indicados en la actividad anterior para realizar las transformaciones.

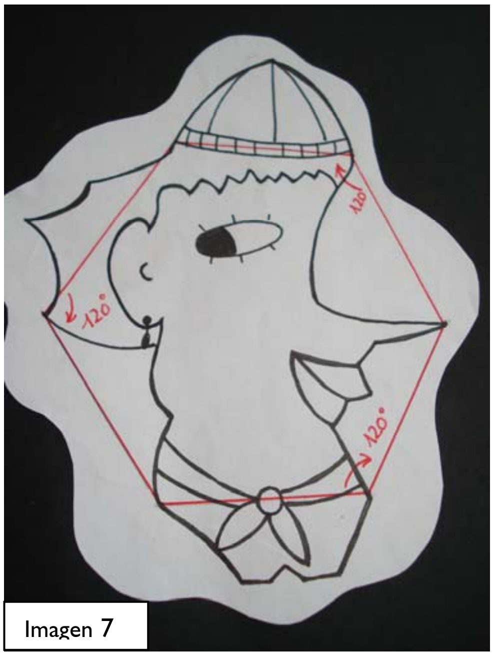


Imagen 7

Como vemos en esta imagen, en el ejemplo del hexágono de la actividad 2, ya hemos dado vida a la "figura extraña" poniéndole un sobrero, una cara y un pañuelo al cuello. Quizás otro alumno, sobre la misma transformación vacía pueda ver, por ejemplo, un murciélago, en cuyo caso los trazos dibujados en el interior de la figura irían encaminados a que todos pudiésemos descubrir ese murciélago.

Debido a que lo habitual es que la inspiración no llegue en el primer intento, ni en el segundo o tercero, lo más práctico es rotular el polígono de partida y hacer a lápiz las transformaciones. Así podremos hacer cuántos intentos necesitemos, sin necesidad de volver a construir el polígono. Cuando lleguemos al diseño definitivo, lo calcaremos, ahora sí, rotulando lo que era una "figura extraña" y dejando sin calcar los lados del polígono del que partimos.

Es muy interesante, especialmente para esta actividad, que el trabajo, aunque individual, se haga con varios compañeros alrededor, porque a menudo es más fácil dar ideas para la "figura extraña" del compañero, que darle vida a la propia. Cada alumno debe sacar adelante su propio trabajo pero puede estar ayudado, inspirado, animado, etc, por el resto de sus compañeros de grupo.

En la siguiente actividad veremos como con los dos ejemplos de la Alhambra que han ilustrado la actividad 2, se forman mosaicos sin haber realizado con ellos la actividad 3. Esta es evidentemente una forma de crear mosaicos, pero no es la forma que yo decidí para trabajar con mis alumnos. Todos los mosaicos con los que se formó la exposición pasaron necesariamente por esta actividad 3. El resultado de esta actividad es concretamente el que hace que estos mosaicos recuerden, salvando las distancias, algunos de los trabajos de M.C. Escher, por ejemplo, el de la segunda ilustración que habéis podido observar en este escrito.

Actividad 4

Llegamos al final. Después de una actividad de lo más creativa y divertida para los alumnos, llega el momento más monótono, que es el de repetir la tesela, fruto de la actividad 3, para cubrir el plano.

¿Encajarán las teselas? ¿Cubrirán todo el plano sin solaparse y sin dejar huecos? Claro que sí, será como completar un puzzle.


Imagen 8

Veamos a continuación cómo quedarían los ejemplos de la actividad 2. En el caso del triángulo vemos como primera ilustración la famosa pajarita de la Alhambra. En el vértice central confluyen 6 pajaritas, 3 blancas, dos rojas y una verde.

El siguiente ejemplo que nos aclara estas transformaciones del triángulo, sí contempla, a diferencia del de la "pajarita", la realización de la actividad 3. Observamos 6 "muñecos" alrededor del vértice, alternando dos tonalidades diferentes.


Imagen 9

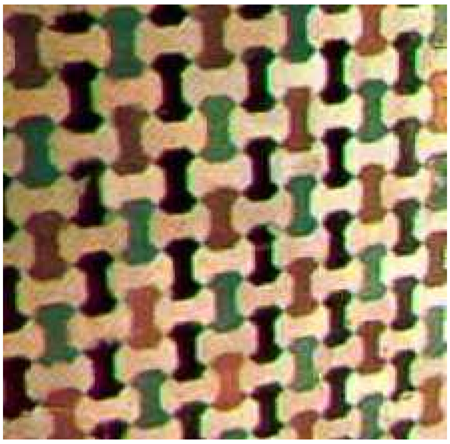


Imagen 10

A continuación vemos el "hueso", también de la Alhambra. Se puede apreciar la unión de 4 huesos en cada vértice, dos blancos y los otros dos de otros colores.

Por último, en la transformación del hexágono, mirando el cuello de la señora, comprobaremos que hay tres figuras alrededor de cada vértice, en tres combinaciones diferentes de color.

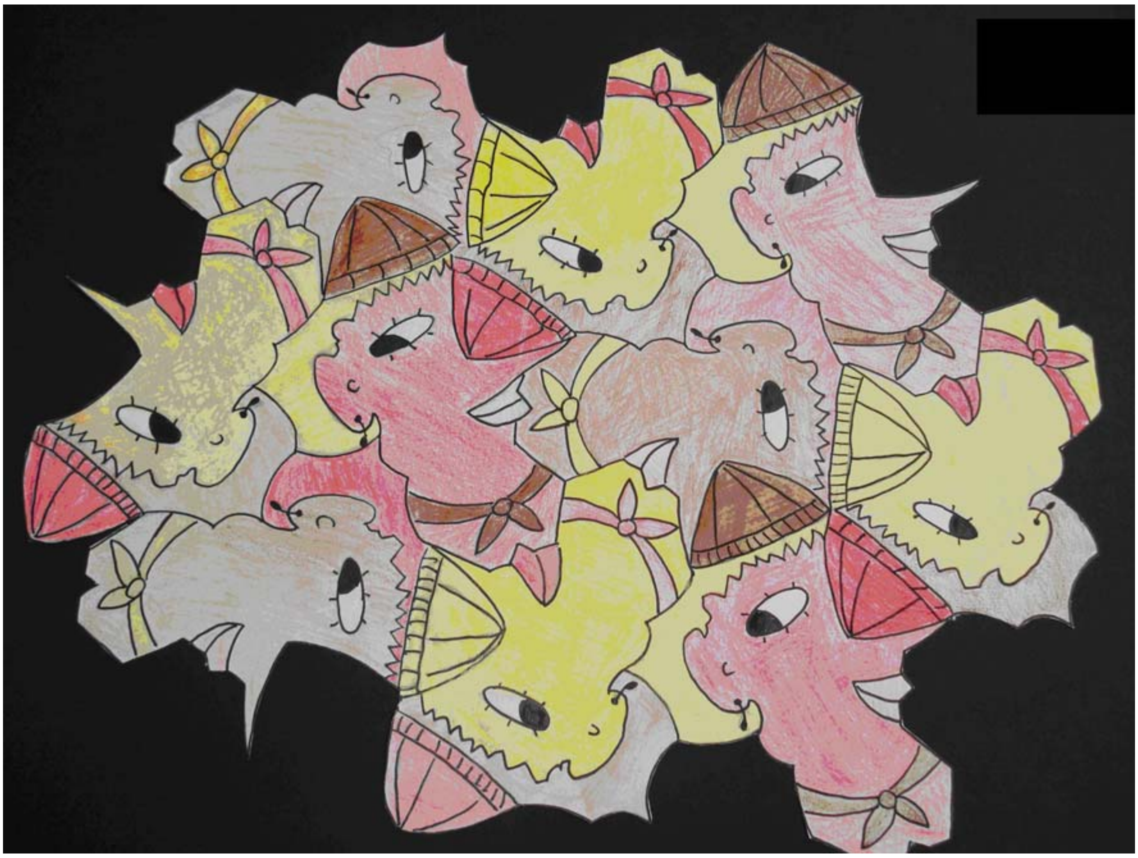


Imagen 11

Estos números 6, 4 y 3 de confluencias de figuras en los vértices, son una constante para cada uno de los polígonos (triángulo, cuadrado y hexágono, respectivamente). La explicación es muy simple, y ya se atisbó en la actividad 1. Se basa en la medida del ángulo interior del polígono. Podríamos invitar al alumnado a redescubrirlo o, al menos, a recordarlo. El ángulo interior del triángulo equilátero mide 60 grados y se necesitan, por tanto, 6 ángulos interiores de triángulos, para completar los 360 grados de la circunferencia. Un razonamiento similar se puede hacer para el cuadrado (con 4 cuadrados) y para el hexágono (con 3 hexágonos).

A continuación podéis leer unos consejos para que la tarea de teselar, es decir, la realización de esta actividad 4, no se haga tan monótona:

(1) Compartir la tarea con otro compañero, es decir, entre dos compañeros harán los mosaicos de cada uno de ellos.

(2) Partir de polígonos grandes (de 6 u 8 centímetros de lado) y hacer los mosaicos en A3, para que no sean las repeticiones, ni muchas para aburrir, ni muy pocas como para no percibir el mosaico.

(3) Procurar llegar a diseños originales sin demasiadas “filigranas” en el trazado.

(4) Aprovechar este trabajo mecánico y que requiere poca concentración, para disfrutar de la compañía de una música adecuada a las circunstancias.

¿Cuál es el proceso a seguir, cuando se tiene preparada la tesela base (actividad 3)? Se trata de conformar una especie de puzzle, como muestran las cuatro ilustraciones anteriores, con la “pieza” que tenemos entre manos. Para ello necesitamos una trama, en DIN A3, del polígono de partida y del mismo tamaño del de partida. Esta trama sólo necesita los vértices de los polígonos, ya que los lados desaparecen con las transformaciones. En esta trama, y apoyados en la ventana, calcamos la tesela haciendo coincidir los vértices de la tesela con los de la trama. Tras el primer calco, hay que girar la tesela volviendo a encajar vértices con vértices y uno de los lados ya dibujados con su transformado. Este proceso se repite cuantas veces haga falta hasta completar la trama. Observaremos que en los límites de la trama las figuras quedan incompletas. Hay dos opciones: dejar la forma rectangular del DIN A3 aunque las figuras de los bordes queden “rotas”, o recortar el DIN A3 por las figuras completas de los bordes, aunque el diseño no quede en forma de rectángulo. Particularmente, esta segunda opción, que habéis podido ver en el ejemplo del hexágono, me parece que resulta más bonita.

El punto de vistosidad al mosaico se lo da, sin duda, el color. Hay que conseguir que las teselas se distingan unas de otras de manera clara, y al mismo tiempo, que desde el primer vistazo, se perciba la sensación de estar viendo la misma figura, repetida en las diferentes posiciones. Algunas ideas que nos pueden ayudar a conseguirlo son:

1. No colorear todas las teselas con el mismo color. Si el deseo del autor es que todas tengan el mismo color, al menos habría que graduar la intensidad de forma que no coincidiesen teselas unidas por trazos completos, con la misma intensidad.
2. No colorear en el mismo tono las teselas que estén unidas por un trazo.
3. Mantener simetría en la posición de las teselas coloreadas en los mismos tonos.

Hablando del color, sería interesante plantearle al alumnado los colores que necesitarían para cumplir las condiciones mencionadas anteriormente. Una vez que ellos sacasen sus propias conclusiones, a las que suelen llegar con facilidad y acierto, podría ser interesante comentar, quizás sólo en el caso de alumnos de Educación Secundaria, el “teorema de los 4 colores”.

Actividad 5

Actividades como estas bien merecen ser expuestas para el disfrute, tanto de los orgullosos creadores, como de sus profesores, así como, de los incrédulos espectadores, que no dan crédito a que algo “bonito” pueda formar parte de una materia como las matemáticas. No es raro escuchar, “¡qué bonita le ha quedado este año la exposición a los compañeros de educación plástica!” Manera de no llevar a nadie a engaño, es buscar un título para la exposición en el que aparezca la palabra “matemáticas”. Nuestra exposición llevó por título “las matemáticas también se ven”.

Para que la exposición refleje lo más fielmente posible las fuentes de inspiración, el proceso del trabajo realizado, las creaciones, etc, y todo ello sin aburrir al espectador, señalo, a continuación, los siguientes aspectos:

1. Elegir un título para la exposición significativo y atrayente al mismo tiempo.
2. Poner a cada trabajo un título que haga referencia, a ser posible, tanto al polígono de partida como al resultado final.
3. Hacer una brevísima ilustración de las fuentes de inspiración, por ejemplo, alguna imagen de los mosaicos de la Alhambra y de los de Escher y alguna referencia escrita a ambos.
4. Ubicar de manera diferenciada los mosaicos construidos a partir de cada uno de los tres polígonos.
5. Elegir para cada polígono, el mosaico que nos parezca mejor realizado y más vistoso, y de él exponer, además del resultado final, el proceso paso a paso con algún texto aclaratorio cuando se crea necesario. A continuación colocar todos los mosaicos realizados a partir del mismo tipo de polígono.
6. Concluir con un "así se hizo", con fotos de los alumnos calcando en las ventanas, coloreando, montando la exposición…

A continuación se muestran las imágenes de algunos de los mosaicos de la exposición.


Imagen 12

En el de las caras de labios gordos, hecho a partir de triángulos, se puede observar cómo alrededor de cada vértice hay 6 caras. Se puede observar también que uno de los lados no tiene transformación alguna. El mosaico recoge dos combinaciones diferentes de color en sus teselas.

En el de los peces, hecho a partir de cuadrados, confluyen 4 peces en cada vértice, y también hay dos combinaciones de color.

Imagen 13

Por último, el de las caras con gafas, hecho a partir de hexágonos. En cada vértice confluyen 3 figuras de 3 colores diferentes.

Imagen 14

En todos ellos se puede apreciar el juego del color y de las simetrías.

Conclusión

La realización de esta actividad, no la he llevado a cabo sólo en el Instituto Español de Andorra, como habéis podido leer en la introducción, sino también en otros centros y con alumnado de otros niveles (4º de ESO, diversificación…).

Mi experiencia en cualquiera de los casos ha sido, cuánto menos grata. En general el alumnado ni se imagina que dentro de una materia como las matemáticas quepan actividades de estas características.

Entiendo que todos aquellos que hemos tenido la fortuna de descubrir la belleza del universo matemático estamos en la obligación de contribuir a la demolición de esa burbuja de rechazo a las matemáticas que rodea a buena parte del alumnado. Esta es una idea que marca mi labor docente diaria. Me siento siempre en la cuerda floja, haciendo malabarismos entre el rigor matemático y el lenguaje cercano a los alumnos. La actividad que os he presentado aquí es un ejemplo claro de cómo podemos mostrar a nuestros alumnos una parte de las matemáticas que le resulte “bonita”.

Creo que esta actividad es una estupenda ocasión para que los alumnos puedan trabajar en equipo y para “enganchar”, al menos unos días, a esos alumnos que se encuentran perdidos en ese extraño lugar poblado de polinomios, ecuaciones y otros muchos “monstruos desconocidos”, que es para ellos la clase de matemáticas.

Cuando he hecho mosaicos con los alumnos siempre he conseguido que, durante unos días, todos trabajen juntos en algo que sienten, que pueden conseguir hacer bien, que pueden mostrar a los demás y de lo que se pueden sentir orgullosos. ¿Qué más puedo pedir?

La idea al describir esta actividad no es otra que haceros llegar a vosotros, compañeros, mi experiencia en el aula. Si algunos os animáis a llevarla a cabo, espero que os sea de utilidad lo que os he contado. Si además quedáis satisfechos con el resultado sentiré, por la parte que me toca, que ha merecido la pena el esfuerzo.

Referencias de las imágenes por orden de aparición

- Imágenes 1 y 2: Realizadas por alumnos del Instituto Español de Andorra en el curso 2007/08.
- Imagen 3: http://www.juntadeandalucia.es/averroes/iesarroyo/matematicas/materiales/3eso/geometria/movimientos/mosaicos/mosaicos.htm [fecha de consulta: 20-12-09]
- Imagen 4: http://roble.pntic.mec.es/valm0013/curvos.html autor: Vicente Álvarez Manuel [fecha de consulta: 20-12-09]
- Imagen 5: http://teleformacion.edu.aytolacoruna.es/MOSAICOS/document/alhambra.html [fecha de consulta: 20-12-09]
- Imagen 6 y 7: Realizada por un alumno del Instituto Español de Andorra en el curso 2007/08.
- Imagen 8: http://teleformacion.edu.aytolacoruna.es/MOSAICOS/document/alhambra.html [fecha de consulta: 20-12-09]
- Imagen 9: http://roble.pntic.mec.es/valm0013/curvos.html autor: Vicente Álvarez Manuel [fecha de consulta: 20-12-09]
- Imagen 10: http://teleformacion.edu.aytolacoruna.es/MOSAICOS/document/alhambra.html [fecha de consulta: 20-12-09]
- Imágenes 11, 12, 13 y 14: Realizadas por alumnos del Instituto Español de Andorra en el curso 2007/08.

Fuentes

En la web:

- Para las obras de Escher: www.mcescher.com/ [fecha de consulta: 20-12-09]
- Para el teorema de los 4 colores: http://es.wikipedia.org/wiki/Teorema_de_los_cuatro_colores [fecha de consulta: 20-12-09]
- Para ver distintos modos de transformaciones con ilustraciones virtuales: http://concurso.cnice.mec.es/cnice2006/material105/Mosaicos/alhambra.html [fecha de consulta: 20-12-09]
http://www.juntadeandalucia.es/averroes/iesarroyo/matematicas/materiales/3eso/geometria/movimientos/mosaicos/mosaicos.htm
[fecha de consulta: 20-12-09]
http://www.ceibal.edu.uy/contenidos/areas_conocimiento/mat/teselacionesplano/escher.html
[fecha de consulta: 20-12-09]

Bibliografía

- J.L Antón, F. González Ferreras, C. González García, J. Llorente, G. Montamarta, J.A. Rodríguez y Mª. J. Ruíz. Taller de matemáticas en la ESO, de ediciones Narcea. Apartado dedicado a "actividades con mosaicos"

- M.C.Escher. Estampas y Dibujos. Taschen

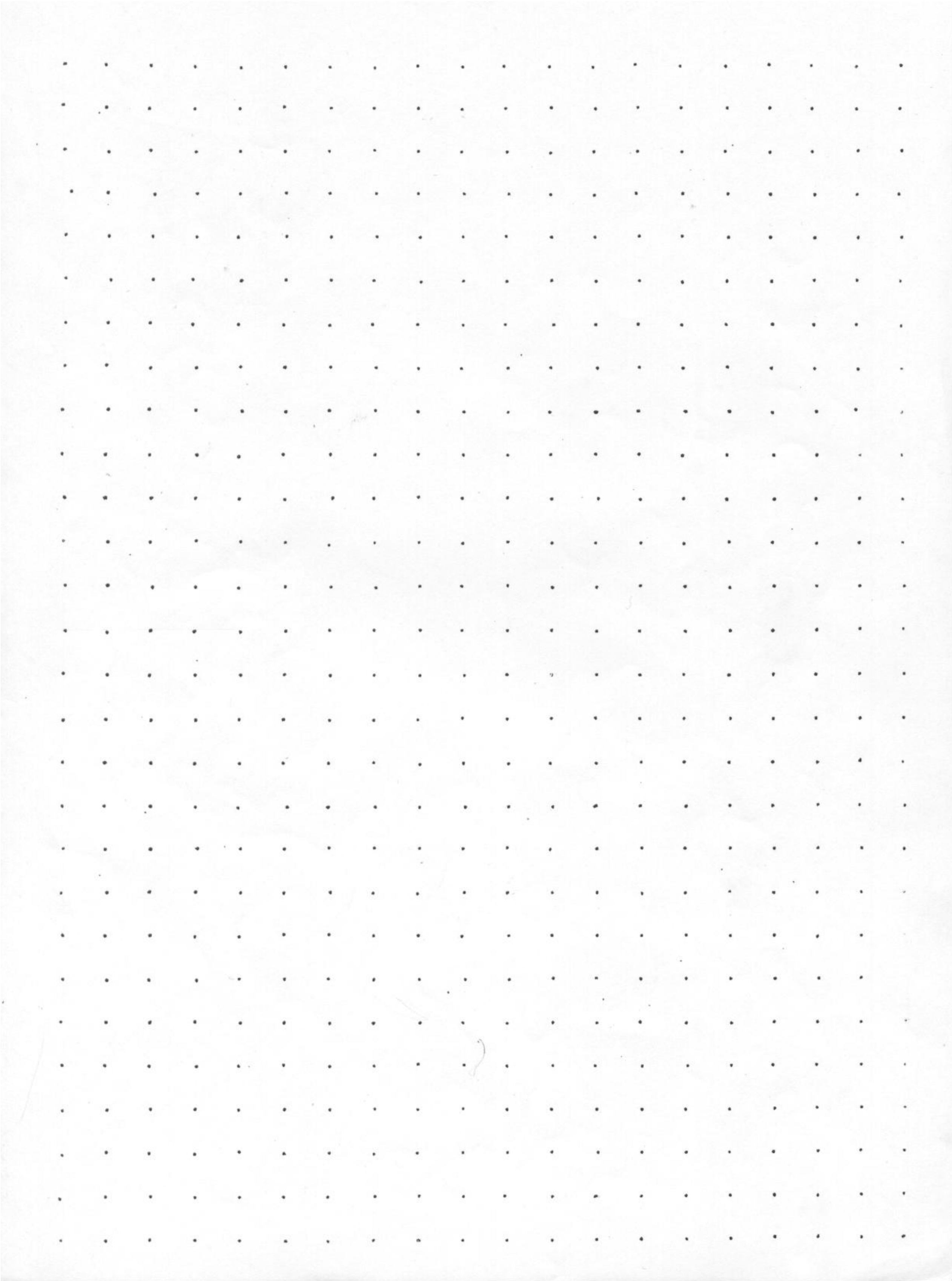
Vídeos

- La aventura del saber. Más por menos. Números 2 y 3 de la colección.

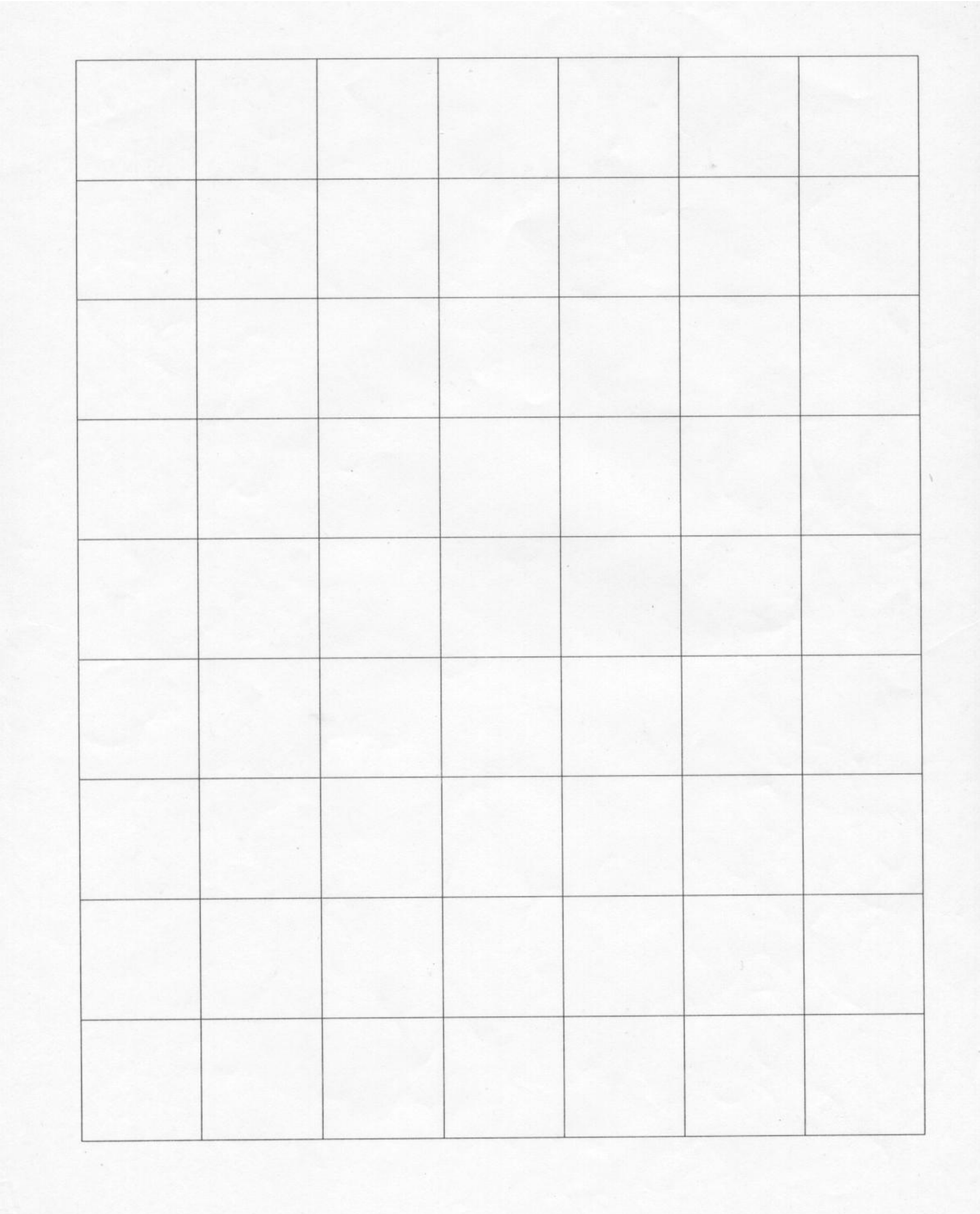
Anexos

- Tramas fotocopiables y ampliables de puntos, triángulos, cuadrados y hexágonos.

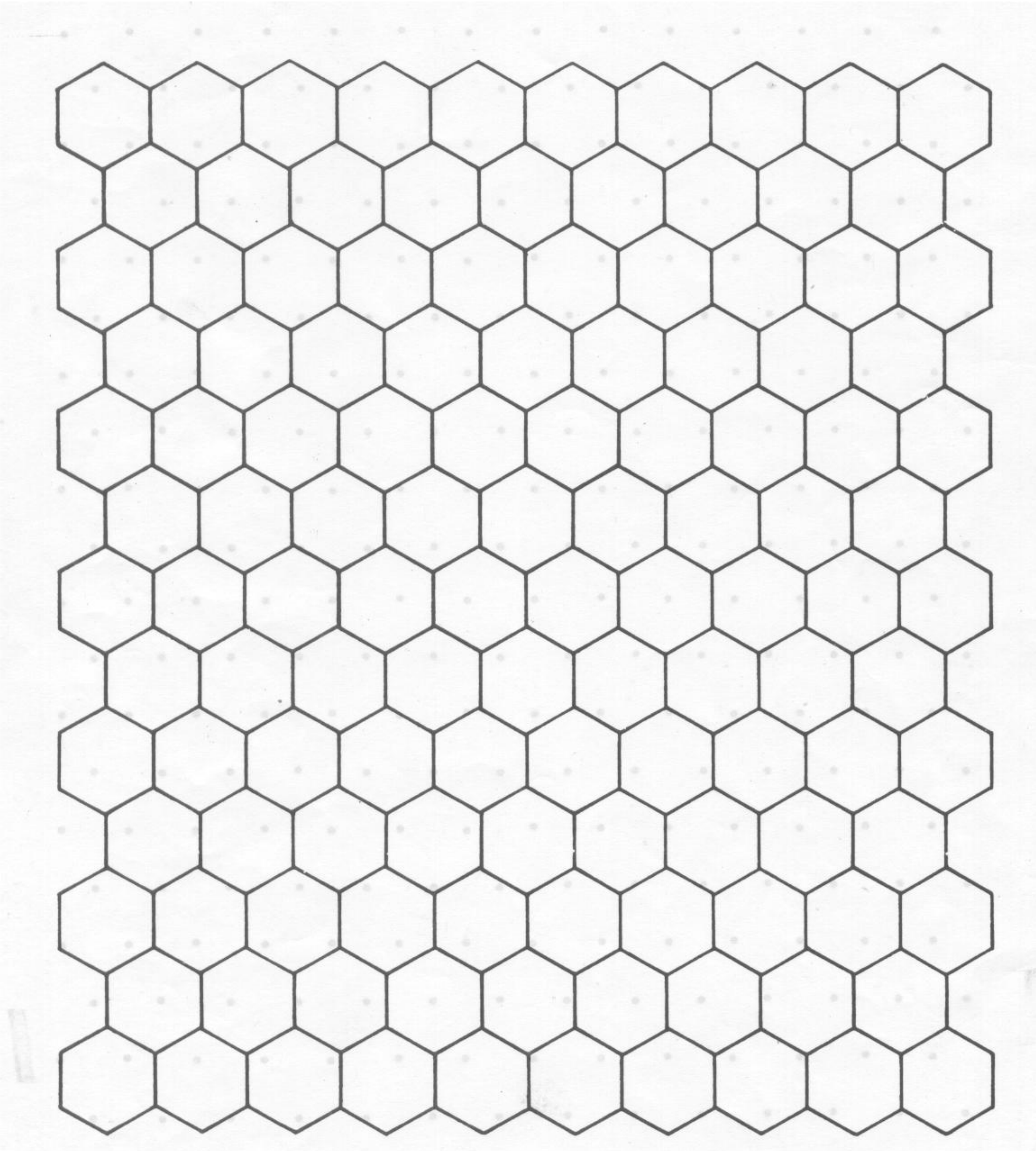
ANEXO I - Trama de vértices de cuadrados



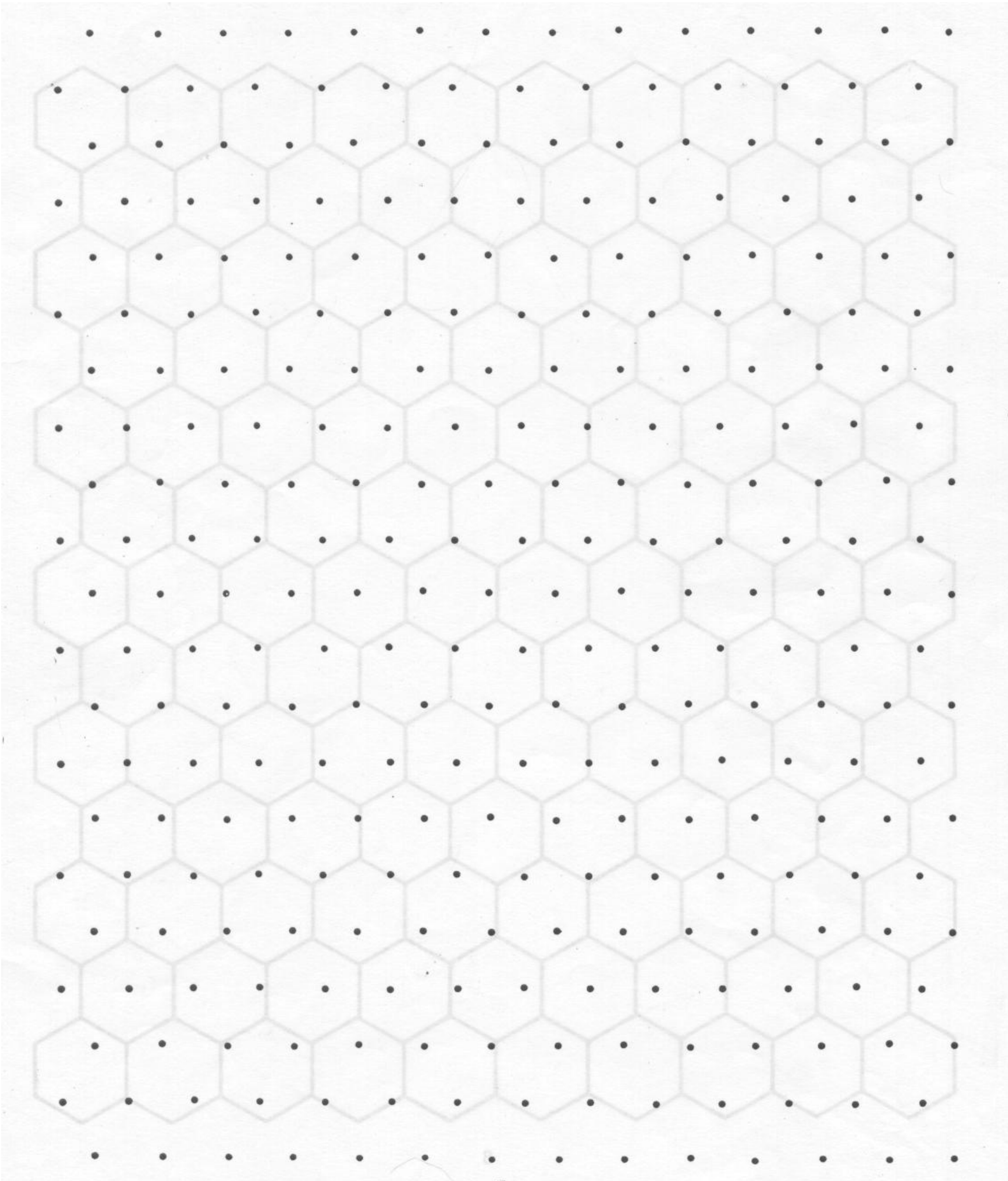
ANEXO II - Trama de cuadrados



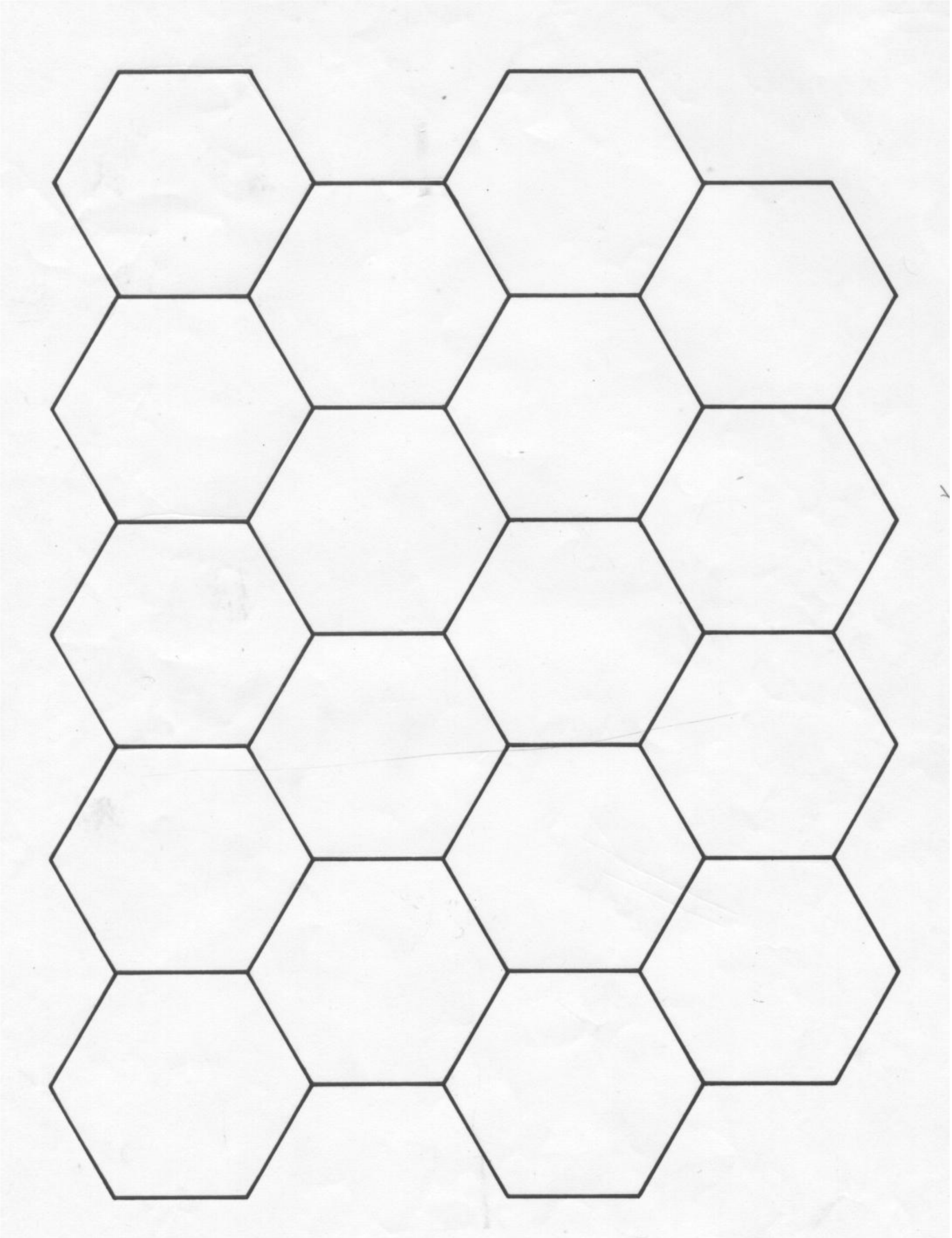
ANEXO III - Trama de hexágonos



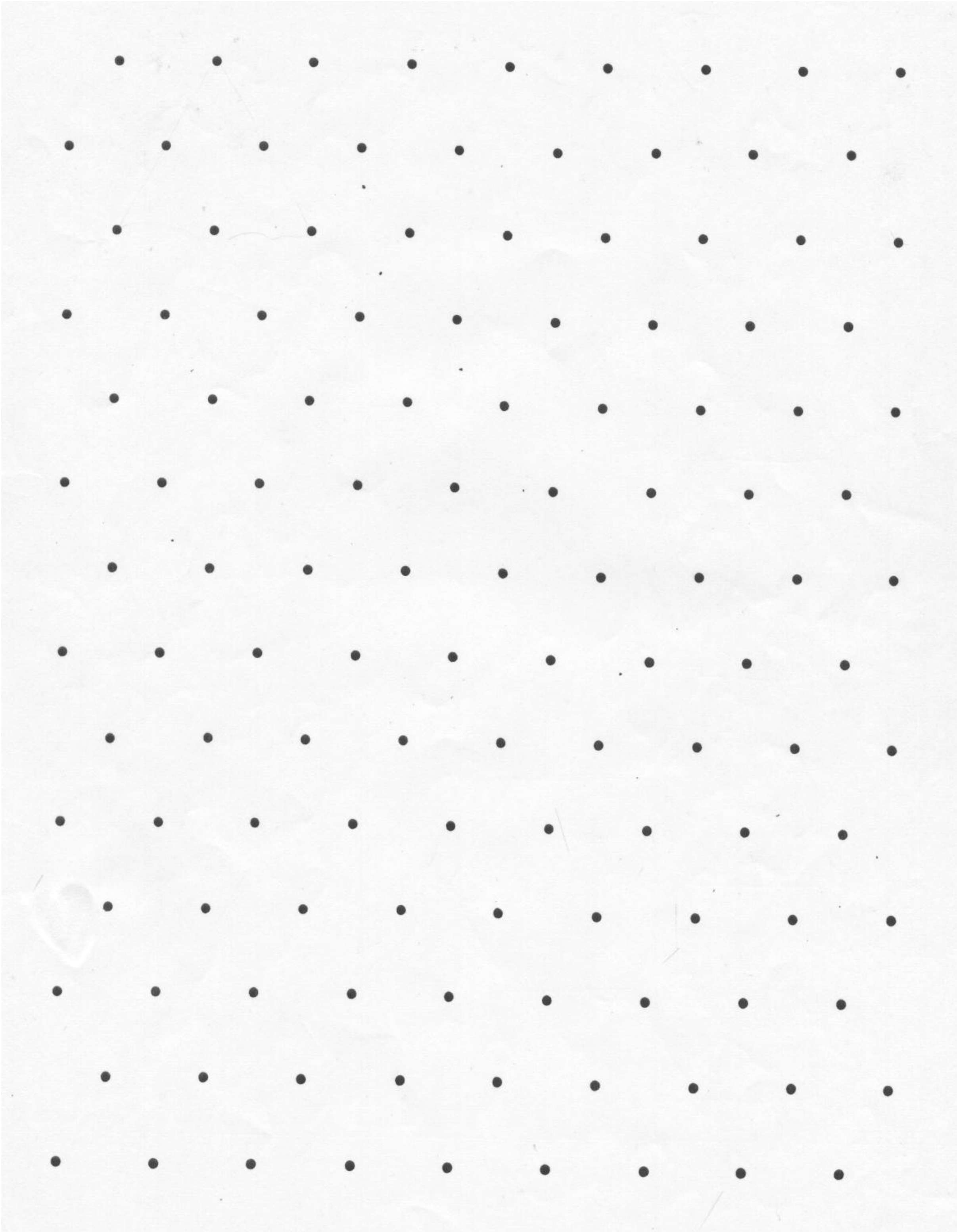
ANEXO IV – Trama de vértices de triángulos y hexágonos



ANEXO V – Trama de hexágonos



ANEXO VI – Trama de vértices de triángulos y hexágonos



Investigaciones en el aula de matemáticas
otra forma de enfocar la resolución de problemas

Enrique Salazar Balboa

INTRODUCCIÓN

Existen distintos niveles de realización matemática a través de los cuales nuestros alumnos muestran su sabiduría y potencial matemático. En este monográfico se presentan actividades de todo tipo, se les ofrece la oportunidad de mostrar su creatividad, imaginación, rigor, su conocimiento de métodos y conceptos matemáticos, las habilidades para la comprensión y el manejo de las nuevas tecnologías, etc. Sin duda, cada actividad pondrá al alumno en situaciones más o menos familiares, más o menos elaboradas, y más o menos complicadas.

Pero dentro de ese cuerpo de aptitudes variables que cotidianamente le pedimos en el aula, yo personalmente he detectado la gran dificultad que supone en general para él enfrentar una *situación abierta*. Llamo abierto, en este caso, a todo aquello que no es cotidiano en el aula, y desgraciadamente la investigación y la indagación son asignaturas pendientes en el aprendizaje matemático de nuestros alumnos por cuanto suelen requerir mucho tiempo, mucho esfuerzo, y demasiada autoconfianza y tesón.

En estudios y taxonomías acerca del hacer matemático de los alumnos, algunos autores destacan lo que se denominan **capacidades de orden superior**. Y este es el caso. Podemos hablar de la comprensión, el razonamiento, los procedimientos específicos, o los de índole más general, podemos hablar de la capacidad para comunicar ideas, etc. Y podemos hablar de la *potencia matemática* de un alumno, de su capacidad para ir más allá de lo previsto y más allá del estereotipo. Aquí es donde se sitúan la investigación, la indagación y la conjetura. No son otra cosa que una síntesis de alta exigencia de todas las capacidades antes mencionadas con el objeto de que el alumno **produzca conocimiento**.

Está en juego la aplicación de los conocimientos y capacidades que el alumno tiene, y su calidad como aprendiz para conjugarlas sin el guión previo que en muchas ocasiones le proporcionamos en el aula. Aquí se presentan actividades dirigidas al profesor, más o menos pautadas y explicitadas, pero las peripecias que viven el profesor y los alumnos no serán otra cosa que el resultado de enfrentar tareas no siempre sencillas y fáciles, así como el equilibrio entre las situaciones rutinarias conocidas de aplicación directa y el uso de algoritmos o fórmulas, por una parte, y las situaciones surgidas de la indagación y el razonamiento, por otra. La información podrá ser escasa o abundante, el alumno podrá usarla, e incluso generarla, pero la complejidad del problema será el denominador común de todas estas tareas. La complejidad de las operaciones y los números implicados variará según el nivel en el que se aplique, pero siempre se podrá ir más allá.

Estamos hablando del nivel superior.

Decir, por último, que las actividades presentan un rango de profundidad y de dificultad en su tratamiento susceptible de aplicarse a distintos niveles. De hecho, abarcamos la franja desde los 11 hasta los 13 años.

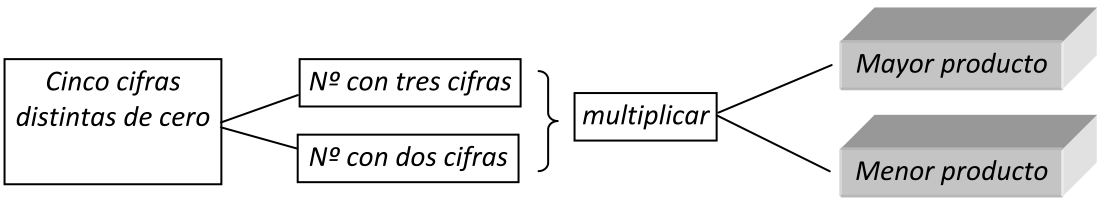
Actividad Nº 1

MULTIPLICACIÓN-VALOR DE POSICIÓN DE LAS CIFRAS

CALCULADORA

En esta primera situación, detectamos bien el "miedo", bien la "afición" de nuestros alumnos ante las operaciones básicas y el valor de la posición de las cifras en un número.

A partir de 5 cifras distintas, formar dos números, uno de dos cifras y otro de tres, de manera que el producto de ambos produzca el mayor resultado y el menor resultado



Primaria:	*Secundaria: 1º*	*Secundaria: 2º*
Comenzar con menos cifras Resultados concretos	Cinco cifras Resultados concretos Intentar inducir generalidades	Cinco cifras Resultados concretos Incluir el cero Intentar inducir generalidades

Solución: mayor → primera con penúltima (tras ordenarlas)

menor → dos cifras menores (tras ordenarlas)

Usar: tablas para identificar patrones numéricos, calculadora imprescindible.

Primaria: Una secuencia:

- Comenzar con cuatro cifras, y colocar aleatoriamente dos y dos cifras, varias veces. Resultados distintos. La cuestión tiene sentido.
- Comprobar que es mejor colocar el mayor antes: 93 mejor que 39
- Combinar distintas posiciones. Llegar a la conclusión con cuatro cifras, ya que sólo hay tres posibilidades (el mayor siempre será el primero con el último).

- Ampliar a cinco cifras. Hasta donde se llegue. Con la experiencia anterior de cuatro cifras, el alumno debe sospechar que no hay que tomar las tres cifras mayores juntas. Comprobar distintos resultados. No es necesario ir más allá dado que se trata de una especie de juego, pero algunos alumnos seguramente hallarán la respuesta correcta para cinco cifras.

Secundaria 1º:

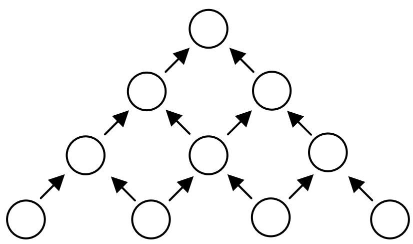
- Tantear directamente con cinco cifras. Resultados distintos. El problema tiene sentido.
- Comprobar que es mejor colocar el mayor antes: 93 mejor que 39.
- Combinar distintas posiciones. Surge la sospecha de que los tres números mayores no deben ir juntos.
- Concluir un resultado general: Primero con penúltimo (máximo) y dos últimos (mínimo). En este nivel de 12 y 13 años habrá alumnos que logren una repuesta correcta.
- Debate abundante.

Secundaria 2º:

- Mismo proceso que en 1º de ESO
- Avanzar en las conjeturas incluyendo el cero. Extraer conclusiones generales en este caso: no existe diferencia alguna con el caso general.

<u>Semejante</u>:

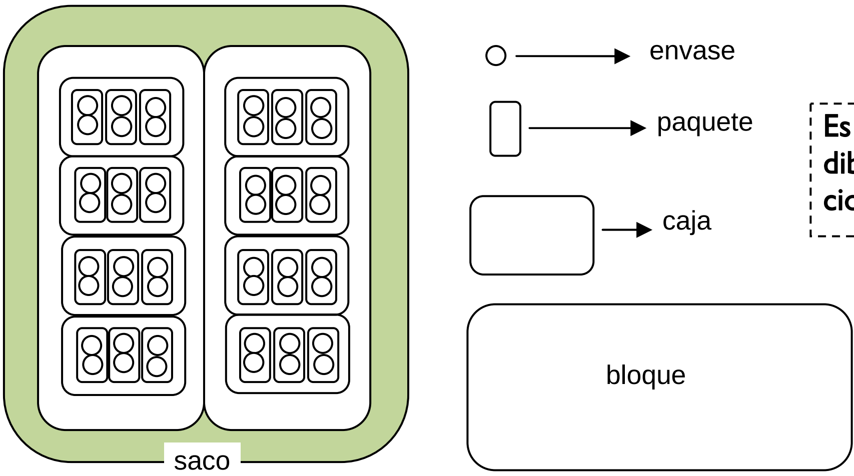
Coloca los números 1, 2, 3 y 4 en los círculos inferiores, y efectúa los productos de parejas de números según indican los trazados de las líneas. ¿Qué disposiciones iniciales producen los productos máximo y mínimo en la cúspide?



Actividad Nº 2

AGRUPAMIENTOS-DIVISIÓN-SISTEMA DE NUMERACIÓN

Un paquete contiene 2 envases, una caja contiene 3 paquetes, un bloque contiene 4 cajas, y un saco tiene 2 bloques. ¿Qué material necesitamos para transportar 1806 envases?



Es necesario realizar dibujos, representaciones y esquemas

En esta actividad aprendemos a dividir sumando, mejor aún, multiplicando. El papel de cada elemento de la división adquiere un sentido pleno, la *divisibilidad* de (dividendo - resto) con respecto al cociente, y con respecto al divisor, ofrece la oportunidad de reflexionar sobre qué ha de ocurrir en una división para que *dividendo y divisor se relacionen como múltiplo y divisor*. El *resto* adquiere un significado vinculado a la divisibilidad.

A) *Primaria*

Esta es una actividad esencialmente instructiva. De hecho, están en juego los conocimientos de los alumnos de primaria sobre:

Interpretación del resto de la división
Bases de agrupamiento distintas de la decimal, y
Divisibilidad

En realidad, en primaria es natural comenzar esta tarea tanteando; también en secundaria. La división, y el agrupamiento que esta conlleva, o sea, el número de grupos menores que contiene un grupo mayor, requiere inicialmente realizar el problema de la forma más natural: contando. Los alumnos comenzaron su relación con las matemáticas contando, y por tanto es natural que imiten el instinto matemático del ser humano. El concepto de dividir es posterior, y de hecho es una operación que no resulta fácil de asimilar, incluso en el primer ciclo de secundaria. Es por ello que el alumno ha de hacer grupos, tal como los hacemos al agrupar en nuestro sistema de numeración de 10 en 10, de

100 en 100, etc. La simplificación que aporta la multiplicación como *acelerador* de la suma es algo también natural en casi todo niño de esta edad, con lo que, una vez realizados los agrupamientos posibles (paq, caja, etc), el alumno ha de entender que puede ordenar y *transportar sacos* para terminar antes. La sugerencia es poner al alumno en situación real, tal como si estuviera trabajando en una fábrica de helados de nata.

Los sucesivos productos por 48 (cada saco) determinarán los datos que nos interesan, para ir pasando a productos por 24 (cada bloque), por 6 (cada caja), y finalmente por 2 (cada paquete). Nos quedarán los envases sueltos.

De esta forma conseguiremos aprender algo sobre sistemas de numeración, que no son otra cosa que sistemas de agrupamiento.

- Contar número de envases en los distintos órdenes de empaquetado:

1 paq ....×2.................. **2** env
1 caja ....×3..........3 paq ......×2..... **6** env
1 bloq ......×4...... 4 caj ......×3..12 paq ......×2.... **24** env
1 sac ....×2.. 2 bloq .....×4.. 8 caj ....×3 24 paq ....×2.. **48** env

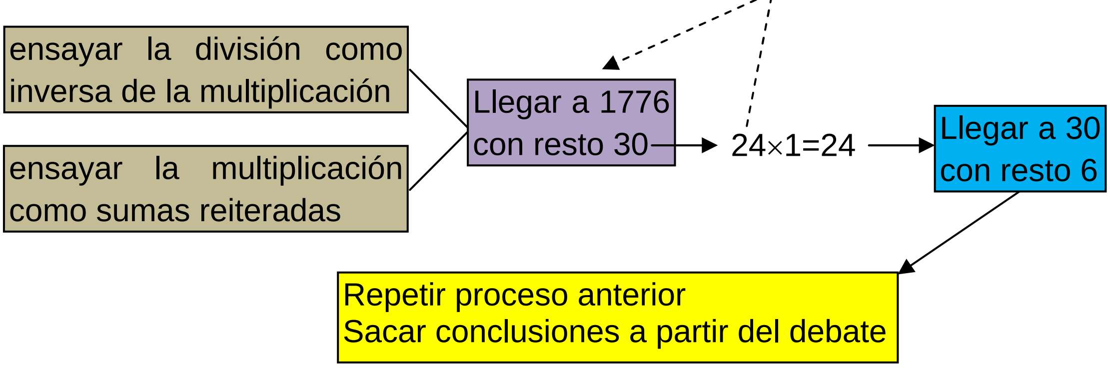
- Utilizar el producto y la suma para aproximarse al total 1806:

$48\times1=48$; $48\times2=96$; $48\times4=192$; $48\times8=384$; $48\times16=768$; $48\times\underline{32} = 1536$

$1536+\underline{4}\times48 = 1536+192 = 1728$; $1728+2\times48 = 1728+96 = 1824$; NO

$1728 + \underline{1}\times48 = 1776 \rightarrow 1806 - 1776 = \underline{30}$ quedan 30

$\underline{32} + \underline{4} + \underline{1} = \underline{37}$



B) *Secundaria: 1°*

En 1° de ESO podemos comenzar como en primaria, aunque el ritmo ha de ser más ágil; ha de pasarse casi inmediatamente a la división sin terminar el proceso de primaria hasta la solución. Básicamente se instruye en los conceptos de

Divisibilidad
División

Veamos una posible secuencia:

- pasemos a dividir : 1 8 0 6 | 48
 3 6 6   3 7 ⟶ 37 sacos
 3 0 envases ↳ 30 | 24
- 6 1 ⟶ + 1 bloque
 envases ↳ 6 | 6
- no sobran envases ⟶ 0 1 ⟶ + 1 caja

- En realidad, es casi obligada una pausa entre las distintas divisiones. Aquí la gran herramienta es el debate, ya no disponemos de la tarea artesanal de primaria consistente en ir ordenando por sacos, bloques, etc. La abstracción que supone la división como tal requiere un comienzo como en primaria, esto es, contando, máxime si queremos motivar a los alumnos; pero en este nivel se ha de centrar la atención en el significado de la división, y sobre todo de su algoritmo. Los distintos restos constituyen el guión de nuestras actuaciones. Es un continuo *volver a comenzar*.

En este último sentido, me permito sugerir que se realice el algoritmo con todos los datos, o sea, con los resultados parciales. Alimenta los contajes previos:

```
1 8 0 6 | 48
1 4 4     3 7
-----
  3 6 6
  3 3 6
  -----
    3 0
```

<u>Semejante</u>:

Los asientos de un estadio se agrupan de la siguiente forma:

cada fila tiene 60 asientos   cada puerta tiene 4 gradas   el estadio tiene 4 sectores
cada grada tiene 25 filas cada sector tiene 6 puertas

1. Calcula la capacidad del estadio
2. Si los espectadores se agrupan de forma ordenada sin dejar huecos entre ellos, ¿qué elementos ocuparían 120.723 personas?

<u>Actividad Nº 3</u>

<u>EL CERO DE LOS NÚMEROS ENTEROS</u>

Bajo el nivel del mar existen profundidades como la Cuenca Argelino-Provenzal, que está entre Francia, Baleares y Cerdeña, a 2.850m bajo el mar (P), la sima mayor del Adriático a 1.190m bajo el nivel del mar (A), y la sima del Cantábrico a 4.850m de profundidad (C). El Teide mide 3718m sobre el nivel del mar.

Expresa estos mismos puntos usando números con signo en cada uno de los siguientes casos:

a) La escala tiene el origen (0) en el nivel del mar (como indica la figura)
b) El origen lo determina el punto P
c) El origen lo determina el punto A
d) El origen lo marca el punto C
e) El origen está en la cima del Teide

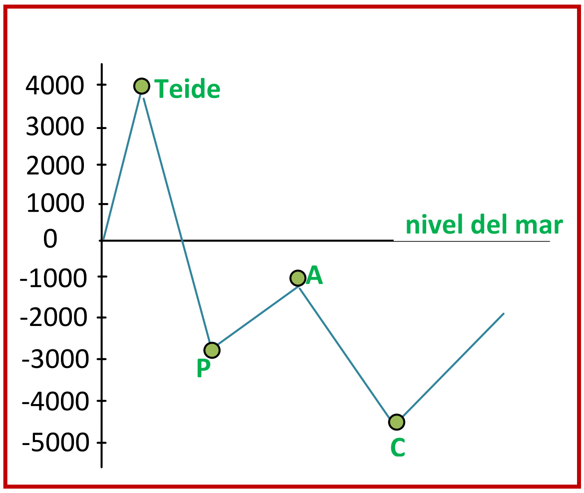


Gráfico A

En realidad, esta actividad debe de realizarse con una regla que sirva de referencia. En el gráfico anterior aparece la línea del nivel del mar, pero sólo en la presentación de la actividad. Sustituir esta línea por una regla-bastidor permite dar al cero el valor de un número más. Por ejemplo, será necesario que el alumno confeccione otros gráficos como el siguiente:

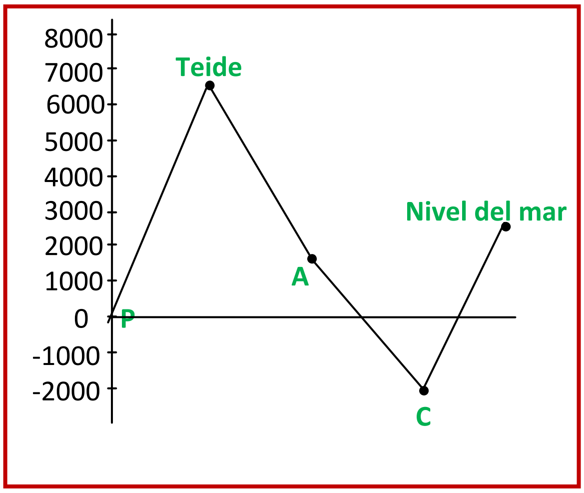


Gráfico B

Primaria	*Secundaria*
Constituye un problema como tal Nivel conceptual de intuición Concepción icónica no numérica	Nivel conceptual inmerso en la estructura conceptual de Z (el cero, la simetría, sentido de avance, etc) Suma y resta con enteros

A) *Primaria* :

Evidentemente, tras la gráfica B sugerida hay una serie de operaciones que serán o no factibles en primaria. Operaciones como:

3718 + 2850 = 6568 para el Teide

2850 - 1190 = 1660 para el punto A, y

2850 - 0 = 2850 para el nivel del mar

Sin embargo, unas y otras tienen sentido y dificultad distintas, de tal forma que para un alumno de primaria, e incluso de secundaria, pueden suponer cierta complicación.

La secuencia en primaria debe de comenzar de forma eminentemente gráfica, y derivar hasta el sentido numérico cuando el grupo de alumnos lo permita (este tipo de investigaciones pone de manifiesto las diferencias importantes entre unos alumnos y otros):

1. La concepción icónica del problema hará que el alumno de primara no tenga dificultad en realizar aproximaciones de esta gráfica B, sin cuantificar con exactitud el valor del nivel de los puntos Teide, A,C y nivel del mar. Haremos una escala en la vertical para que él sepa situar *de forma aproximada* estos cuatro puntos. En realidad, la construcción de la gráfica se emplaza en el nivel más intuitivo de la comprensión de los números enteros con signo, y, de hecho, una sugerencia es comenzar con un ejemplo en el que los números tengan todos una terminación en doble cero, o sea, centenas (-2500, 3400, etc). Esto facilita que las aproximaciones antes mencionadas sean fáciles de realizar, y fácil también la confección de la “nueva” escala. Las operaciones pueden evitarse, ya que la construcción de la escala facilita la comprensión de los “nuevos” niveles.

2. El ejemplo anterior debe de animar ahora a construir un problema semejante pero con cantidades terminadas en cero, o sea, con decenas. La variación de los niveles en función de la referencia u origen puede sugerir al alumno la realización de operaciones del tipo:

a+b = b-(-a)	b - a	b - a = -a - (-b)
1720 - (-340)	2450 - 870	- 790 - (-1510)
Uno por encima del origen (1720) y el otro por debajo (-340)	Ambos por encima del origen (2450 y 870)	Ambos por debajo del origen (-790 y -1510)

Este caso puede animar a los más motivados a intentar situar de forma numérica los puntos a partir de las operaciones. En primaria no parece imprescindible llegar a este nivel de operatividad.

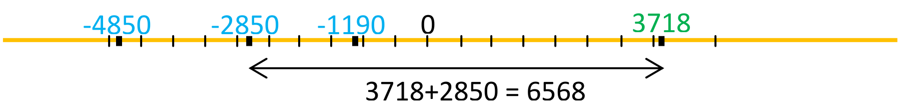
3. En el ejemplo original, probablemente les resulte fácil situar el nivel del mar, ya que la operación 2850 - 0 = 2850 surge sin problemas. Otros casos serán más complicados, pero

la secuencia centenas-decenas es apropiada para otorgar sentido a las operaciones con enteros a partir de las escalas. De ahí a pasar al nivel de abstracción de las operaciones es un salto que evidenciará las diferencias entre unos alumnos y otros, pero todos ellos tendrán un nivel en el que situarse, desde el puramente icónico y manipulativo de la gráfica y una regla-bastidor, hasta el más abstracto de la traducción numérica del problema. Se trata, por tanto, de intentar operar con cualesquiera cantidades como números enteros.

B) *Secundaria* :

- Como en las demás actividades, en secundaria conviene comenzar con trazados de aproximación del tipo de los realizados en primaria (centenas y decenas), con el objeto de motivar la necesidad del uso de las operaciones que nos sitúen los puntos *de forma precisa*. Es de esperar que las diferencias entre unos y otros alumnos sean importantes, por lo que tendremos diferentes respuestas que sólo confirmarán lo que ya sabemos: los números enteros constituyen uno de los nudos conceptuales que incluso algunos alumnos de secundaria no llegarán a deshacer.

- Variar la regla se debe traducir en *variar la escala*. El sentido bipolar del avance en los números enteros (positivo y negativo) nos pone en situación, ya que las operaciones a realizar serán de suma o de resta. De suma si ambos puntos estaban por encima o por debajo del nivel del mar, y de resta en otro caso. Esto no es fácil, y nos recuerda que en realidad estamos en el mismo tipo de ejercicio en el que situamos los puntos en la recta numérica y encontramos las distancias o diferencias entre números enteros.



La estructura simétrica de los enteros, con el cero como centro de las cantidades, supone un tipo de operación distinta a la de sumar o restar números naturales. El signo de los números viene dado por la referencia del cero, pero en este caso el movimiento de la regla que busca otro centro nos exige operar, restar con enteros. Esto no es fácil para alumnos de primaria, como se ha dicho, y por tanto requiere de actividades como está de carácter lineal que están en la intuición de las personas, y que posibilitarán el salto a la abstracción de las operaciones entre enteros para alumnos de secundaria.

Semejante:

Los musulmanes sitúan el inicio de su calendario en el año 622 dC. Indicar qué años de su calendario serán cada uno de los siguientes años del calendario critiano:

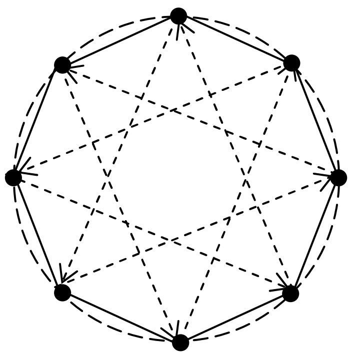
-313 o 313 aC. 224 dC. 616 dC. 2009 dC. -2020 o 2020 aC.

Actividad Nº 4

UN POLÍGONO MUY PARTICULAR: Polígonos regulares estrellados

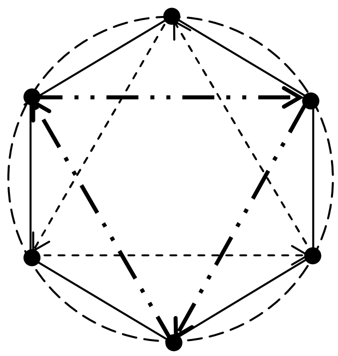
Dividimos la circunferencia en una serie de partes iguales y, partiendo de cualquier punto, damos saltos iguales uniendo esos puntos.

PUNTOS : 8 P (nº puntos)
SALTOS : 3 S (tamaño salto)



Trazamos el polígono
sin levantar el lápiz

PUNTOS : 6 P
SALTOS : 2 S



Hemos de levantar el lápiz
Aparecen dos triángulos

*¿Sabrías decir qué relación ha de existir entre el **número total de puntos** y el **tamaño del salto** para que se pueda realizar el trazado de una vez, sin levantar el lápiz del papel?*

Primaria	*Secundaria*
Comenzar con casos concretos. Por ejemplo, P múltiplo de S. Primera generalización: ambos impares (contraejemplo: 9 y 3) Otra generalización: uno par y otro impar (contraejemplo: 12 y 3)	Surgen generalizaciones falsas como en primaria. Puede surgir otra generalización como que uno de los dos sea primo. Necesario llegar a la relación ***"múltiplos entre sí"***

Esta actividad representa, en mi opinión, la esencia de una investigación escolar. No es plenamente instructiva como las anteriores, pero discurre a lo largo de una gama tal de aproximaciones a la respuesta, que hacen que esta actividad tenga, desde un carácter lúdico, hasta connotaciones académicas sobre los conceptos de número primo y números primos entre sí.

Tiene la cualidad de no requerir llegar a la respuesta correcta sin que por ello deje de ser útil. En realidad, es una actividad complicada en su resolución.

A) *Primaria* :

Práctica del ensayo-error
Debate imprescindible
Potencia la curiosidad
Relaciones múltiplo-divisor y paridad de los números
Intuiciones sobre número primo

- Una primera fase de comprensión del problema. No todos los alumnos tienen facilidad para entender qué se pretende.

- Desde el comienzo surgen relaciones numéricas libres entre P y S. La interacción profesor-grupo, a través del debate, ha de convertirse en un juego de enigmas y adivinanzas. El profesor debe de tener contraejemplos, pero ha de constituirse en notario de los hallazgos de los alumnos. Por ejemplo, una de las primeras sugerencias es que P ha de ser múltiplo de S. Se puede comprobar en este supuesto (ensayo-error) que una y otra vez aparecen tantos polígonos distintos e inconexos como indica S, con un número de lados igual al cociente $P \div S$. En el caso anterior p=6 y s=2, por ejemplo, hay dos polígonos de tres lados (6:2). El profesor ha de animar a los alumnos a tomar nota de ello.

- Surgen otras generalizaciones relacionadas con la paridad de los números. Los contraejemplos han de descartar esos resultados generales. Es frecuente la sugerencia de que uno de ellos ha de ser impar.

- En algún momento debe de surgir la idea intuitiva de que ambos números parecen *estar peleados* de alguna forma. En primaria puede ser una actividad instructiva si el profesor la usa para introducir la idea de números no amigos o primos entre sí, pero no es necesario llegar al final y a las definiciones correspondientes. Cuando se habla de no amigos, nos referimos a la no existencia de divisores comunes. Por tanto:

- La presentación por parte del profesor de ejemplos de parejas de números que formen una estrella trazada de una sola vez, puede sugerirnos que existen números que no tienen divisores comunes. Y nada más, entiendo.

B) *Secundaria* :

Intuiciones sobre número primo y sobre n^{os} primos entre sí

- En secundaria se debe ir más allá. En este nivel hemos de esperar que la comprensión de la situación sea más rápida que en primaria, y la naturaleza práctica de esta actividad, consistente en situar puntos en el círculo, puede acelerar la indagación a partir del ensayo-error y la constatación de lo hallado.

- Es una actividad factible para introducir la noción de números primos entre sí. Sin embargo, es aconsejable también a posteriori, cuando el alumno ya tiene nociones sobre número primo y números primos entre sí. Existen otras actividades motivadoras para introducir ambos conceptos, seguramente menos complicadas que esta, pero aquí se trata sobre todo de indagar y de utilizar conocimientos ya trabajados.

- En secundaria han de surgir generalizaciones como que uno de los números sea primo. Sabemos que todo número primo lo es con cualquier otro, salvo con sus múltiplos (vale el contraejemplo 9 y 3), pero esta suele ser una muy buena aproximación a la respuesta correcta. Normalmente, podremos encontrar alumnos de secundaria que lleguen a sugerir la respuesta correcta.

Actividad Nº 5

LAS DIAGONALES DE UN CUADRILÁTERO

Indagar acerca de la posición relativa y tamaños de las diagonales de un cuadrilátero en todos los casos

Esta es una sencilla investigación, que a nivel de Primaria puede de finalizar con la descripción y la clasificación inicial, y en Secundaria ha de tener un carácter más dinámico, relacionando las diagonales con los lados y los ángulos en movimiento que determinan distintas clasificaciones.

En realidad, es una actividad más propia de Secundaria, por cuanto el nivel de razonamiento requiere un potencial que suele ser elevado para Primaria. No obstante, es interesante iniciar al alumno más pequeño en razonamientos de este tipo (clasificación), ya que el estudio de los polígonos está en la base de muchas otras actividades de Geometría, no siempre bien atendidas a nivel escolar. Las nociones de paralelismo, perpendicularidad, vértice, segmento, distancia, ángulo y clasificación de ángulos, diagonales, e incluso las nociones de área, se ven muy reforzadas si hacemos un esfuerzo en la comprensión de las tipologías de cuadriláteros. Incluso el posterior estudio de los polígonos, el trazado de polígonos regulares, sus ángulos interiores y exteriores, etc, requieren una capacidad de razonamiento que comienza en los contenidos que trabaja esta actividad de investigación.

Depende de la clasificación de cuadrilátero:

Según número de lados paralelos

Según número de lados iguales

Según número de ángulos iguales

La usual es la primera: *Según número de lados paralelos*, y es la que usaremos en Primaria. Partimos de este criterio y lo *enriquecemos* con otras características. En Secundaria, por tanto, se debe dar el salto de cualidad para promover la capacidad de distintos criterios de clasificación que conviven y no son contrapuestos. Partiendo de ella, en este nivel superior se van añadiendo criterios para finalizar la clasificación y realizar otras distintas. Posteriormente, podemos evidenciar que el estudio de las diagonales de un cuadrilátero es una ampliación de los razonamientos que permiten clasificar cuadriláteros y enriquecerlos.

A) *Primaria* **Necesario reconocer las figuras**
Partir del cuadro inicial de clasificación
Añadir estudio ángulos rectos e igualdad de ángulos
Añadir estudio de las diagonales

2 pares de lados paralelos **PARALELOGRAMO**	1 par de lados paralelos **TRAPECIO**	**Ningún par de lados paralelos** **TRAPEZOIDE**
4 lados iguales **cuadrado** **rombo**	2 lados iguales (no //) **trapecio isósceles**	Cuadrilátero genérico
lados iguales 2 a 2 **rectángulo** **romboide** (paralelogramo genérico)	lados desiguales **trapecio rectángulo** **trapecio escaleno**	

CLASIFICACIÓN COMPLETA

2 pares de lados paralelos **PARALELOGRAMO**	1 par de lados paralelos **TRAPECIO**	**Ningún par de lados paralelos** **TRAPEZOIDE**
4 lados iguales 4 ángulos rectos **cuadrado**	lados desiguales 2 ángulos rectos **trapecio rectángulo**	
lados iguales 2 a 2 4 ángulos rectos	2 lados iguales (no //) ángulos iguales 2 a 2	Cuadrilátero

rectángulo	**trapecio isósceles**	genérico
4 lados iguales ángulos iguales 2 a 2 **rombo**	lados desiguales ángulos desiguales **trapecio escaleno**	
lados iguales 2 a 2 ángulos iguales 2 a 2 **romboide** (paralelogramo genérico)		

- Se incorpora el estudio de las diagonales a partir del dibujo:

2 pares de lados paralelos PARALELOGRAMO	1 par de lados paralelos TRAPECIO	Ningún par de lados paralelos TRAPEZOIDE
4 lados iguales 4 ángulos rectos diagonales iguales y ⊥ **cuadrado**	lados desiguales 2 ángulos rectos diagonales desiguales **trapecio rectángulo**	Cuadrilátero genérico
lados iguales 2 a 2 4 ángulos rectos diagonales iguales no ⊥ **rectángulo**	2 lados iguales no // ángulos iguales 2 a 2 diagonales iguales **trapecio isósceles**	
4 lados iguales ángulos iguales 2 a 2 diagonales desiguales ⊥ **rombo**	lados desiguales ángulos desiguales diagonales desiguales **trapecio escaleno**	
lados iguales 2 a 2 ángulos iguales 2 a 2 diagonales desiguales no ⊥ **romboide** (paralelogramo genérico)		

B) Secundaria: 1º y 2º

Apoyo del reconocimiento y del software adecuado
Clasificación por más de un criterio
Estudiar perpendicularidad de diagonales en trapecios
Visión dinámica para transitar de una figura a otra

- En secundaria se deben realizar clasificaciones distintas:

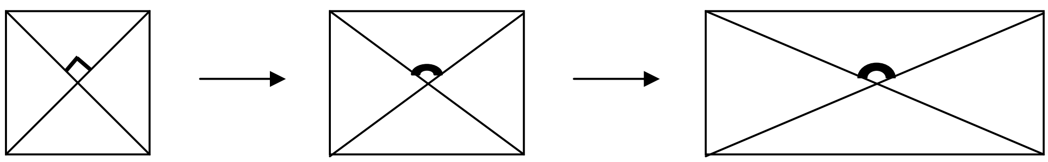
  A partir de la igualdad de lados (todos iguales, iguales dos a dos, o desiguales)

A partir de igualdad de ángulos (todos iguales, iguales dos a dos, o desiguales)
Cruzar distintos tipos de clasificación.

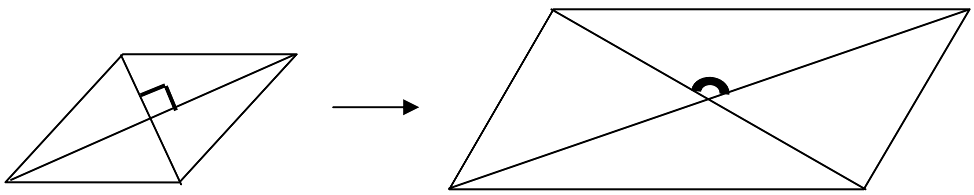
- Las diagonales en los trapecios y la visión dinámica correspondiente requieren del uso de software específico. Algunos programas como CABRI o GEOMETRE (web del MEC http://descartes.cnice.mec.es, enlaces) permiten modificar trazados conjuntos de los elementos de una figura, así como hacer evolucionar las magnitudes de amplitud de ángulo y longitud de lados y diagonales, así como posiciones relativas. Con él podemos ver con claridad, por ejemplo, cómo cambia la posición relativa de las diagonales al pasar de cuadrado a rectángulo, de rombo a romboide, o de trapecio isósceles a trapecio isósceles con diagonales perpendiculares.

A continuación se presentan una serie de instantáneas de algunos de estos movimientos:

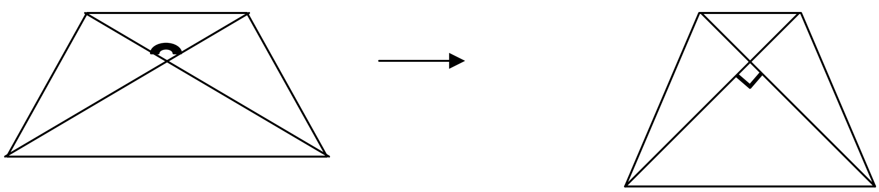
- De cuadrado a rectángulo: ángulo de las diagonales



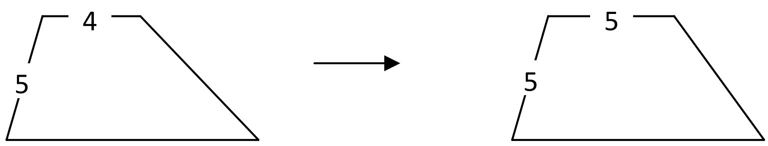
- De rombo a romboide: ángulo de las diagonales



- De trapecio isósceles a trapecio isósceles: ángulo de las diagonales (iguales)



- De trapecio a trapecio: pares de lados iguales



Estas actividades favorecen claramente la comprensión de los distintos criterios de clasificación.

Actividad Nº 6

LOS PROBLEMAS SON EL CALDO DE CULTIVO DEL RAZONAMIENTO

Actividad no pautada que es portadora de la capacidad requerida por excelencia en toda investigación: el razonamiento.

Ejemplos de este tipo son frecuentes en las aulas de matemáticas. Constituyen el soporte mental y emocional de todo cuanto intentamos transmitir a nuestros alumnos.

Debes completar el cuadro, teniendo en cuenta las afirmaciones siguientes:

Nombre	Afición	Edad	Nacionalidad	Estado civil

1. *El que es aficionado al AJEDREZ no se llama ÁNGEL.*
2. *ANTONIO tiene 6 AÑOS menos que el mayor y es ESPAÑOL.*
3. *El que practica la CAZA es SUECO.*
4. *EL SOLTERO tiene 26 años.*
5. *El que es SUECO tiene 4 AÑOS más que el CASADO.*
6. *El que practica CICLISMO no es DIVORCIADO y es de RUSIA.*
7. *FERNANDO es el mayor de los tres.*
8. *EL mayor no es SUECO.*

Materiales didácticos diversos

Jaime Gil García

Introducción

Difícil, esto de enseñar; y difícil, yo diría que enormemente difícil, esto de enseñar Matemáticas. ¿Qué pasará por la mente de un chaval con serias dificultades en esta materia? Si angustioso tiene que ser perder el hilo en una cualquiera, mucho más lo ha de ser en ésta. Otras ofrecen al alumno multitud de vericuetos para atrapar a la expedición y seguir el avance junto a sus compañeros; pero la que nos ocupa es despiadada; no sólo no brinda ningún cabo al que se ha atrasado, sino que cada vez se aleja más de él. Siempre me ha preocupado esta situación y ha estado en mis miras aprender a echar ese cabo al que el alumno pueda asirse para trepar hasta donde se encuentran los demás expedicionarios. No es nada fácil; y, para colmo, la mayoría de las veces, el obligado avance de la expedición no nos lo permite.

¡Qué difícil resulta recuperar a un alumno que hace tiempo que se ha perdido! De muy diversa índole son los factores que lo impiden: la rigidez del sistema educativo-administrativo, la imposibilidad de una atención efectivamente personalizada, la insuficiencia de recursos, la misma negativa del alumno a su recuperación, etc. Algo parecido pasa con los alumnos cuyas posibilidades les permitirían un desarrollo más rápido y mayor de sus capacidades. Quizás sean éstos los que en la actualidad menos atención reciban, produciéndose una pérdida inestimable en el potencial que ellos encierran, tanto para aprovechamiento propio como de la sociedad.

Aunque no sólo dependa de nosotros, y en muchas ocasiones nuestra labor se vea truncada por multitud de factores externos, una parte no sólo importante sino fundamental y decisiva del éxito de cualquier proceso educativo depende de los profesores que lo tengamos que poner en práctica. Igualmente, la recuperación de los alumnos con dificultades y el aprovechamiento de las potencialidades de los más avanzados también dependen en gran medida de nosotros. En este sentido, la elaboración e intercambio de las actividades que llevemos a cabo, tanto de recuperación como de ampliación, puede ser determinante. Quizás, en estos materiales de elaboración propia, en el intercambio y evaluación de los mismos y en una buena coordinación que aglutine estos esfuerzos y multiplique su eficacia, esté, en parte, el principio de la consecución de los pequeños éxitos diarios que conforman el buen enfoque de cualquier labor y parte de la solución a los problemas aquí referidos.

En aras de este intercambio, y aprovechando la oportunidad que *Entremontaña* nos ofrece, tengo el atrevimiento de presentaros algunas modestas muestras de materiales que he elaborado y que suelo proponer a mis alumnos. Me gustaría que cada una de ellas se contemplara formando parte de una propuesta global de trabajo que no tiene cabida aquí, y entendiendo que ninguna de ellas es nada si no va acompañada de la insustituible y determinante actuación de la persona encargada de dirigirlas: el profesor, quien puede darle sentido, o no, a la misma, sugerir multitud de incursiones a variadísimos campos de trabajo, o encaminarla hacia una función tanto de recuperación como de ampliación.

Quiero destacar que cualquier actividad de las que presento perdería gran parte de su valor si la ciñésemos exclusivamente al aprendizaje del motivo matemático al que hace referencia. Por supuesto que el aprendizaje del mismo es importante y objetivo irrenunciable (aunque, ¿cuánto tiempo tardaría ese mismo alumno en asimilarlo cuando tuviese más edad?), pero considero que mucho más lo es el desarrollo que a través de ellas se puede lograr de las capacidades propias del alumno (¿podría desarrollarlas igualmente cuando tuviese más edad?). Quiero decir con esto que cada actividad adquirirá su verdadero valor cuando la acción del profesor consiga transformarla de anecdótica en trascendente en el proceso de formación del alumno.

En la presentación de las actividades, y para no hacerlas excesivamente tediosas, he prescindido de ciertos prolegómenos (objetivos, metodología, etc.) que en otro contexto podrían ser indispensables pero que aquí considero prescindibles dado que, con toda seguridad, el lector los sabrá incluir sin dificultad. Espero (difícil encomienda) que den una visión de una forma de trabajo y que aporten algo que se pueda aprovechar.

Pesada desordenada

En primer lugar quiero mostrar una actividad que he llevado a cabo con varios grupos de 1º y 2º de ESO, que ha tenido muy buena acogida entre los alumnos y que, propuesta periódicamente a lo largo del curso, con niveles crecientes de dificultad, puede mejorar distintas capacidades como concentración, discusión, razonamiento, toma de decisiones, exposición de motivos, respeto a las normas establecidas, etc.

Consiste en presentar la secuencia desordenada de una pesada (figura 1) con el fin de establecer el orden lógico (a veces puede haber varias soluciones) en el que se ha realizado y determinar el peso del objeto. Para ello hay que establecer ciertas condiciones iniciales, como las siguientes:

- Sólo se pueden utilizar pesas como las que aparecen en la imagen.
- En cada paso se puede añadir o quitar una sola pesa.

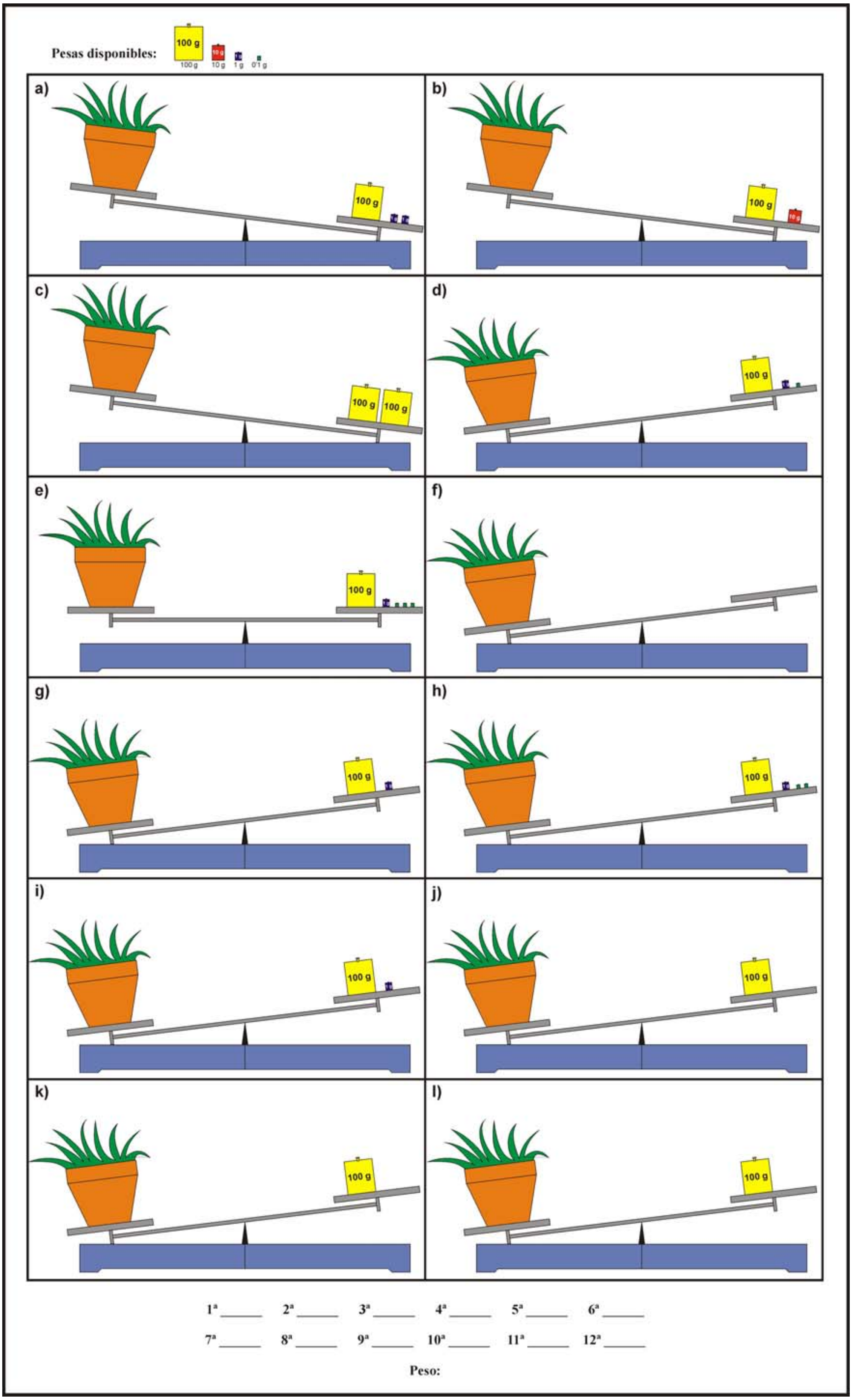

Pesas disponibles:
100 g
100 g
10 g
1 g
0'1 g
a)
b)
c)
d)
e)
f)
g)
h)
i)
j)
k)
l)
1ª ______ 2ª ______ 3ª ______ 4ª ______ 5ª ______ 6ª ______
7ª ______ 8ª ______ 9ª ______ 10ª ______ 11ª ______ 12ª ______
Peso:

Fig. 1

Tanto los aciertos como los errores pueden ser aprovechados para que el alumno exponga los motivos que le han llevado a elegir una viñeta determinada y no otra y para que los compañeros apoyen dichos argumentos o los rebatan con otros. El respeto a las condiciones acordadas, la toma de decisiones, la exposición de motivos y la reafirmación o rectificación de la decisión tomada adquieren gran importancia en esta actividad y dan lugar a situaciones extraordinariamente ricas y aprovechables. Además, el carácter algo lúdico de la actividad atrae la intervención de alumnos que en otras situaciones permanecen pasivos y sin interés.

Creo que una propuesta muy fructífera en la mayoría de las actuaciones que llevamos a cabo en el aula es la de que los alumnos elaboren situaciones similares a las que se estén trabajando. En la actividad que tratamos en este apartado, cada alumno o grupo reducido de alumnos puede preparar una pesada desordenada para proponer su resolución al resto de compañeros. Totalmente secundaria es la subsiguiente resolución ya que es en la elaboración donde los elementos pedagógicamente aprovechables surgen continuamente. Una actividad de este tipo da respuesta a casi la totalidad de las preguntas que nos podemos hacer sobre cómo y en qué medida se han conseguido ciertos objetivos de la actividad, sobre las confluencias o divergencias producidas entre la información dada al alumno y la asimilación que de la misma ha hecho éste, y sobre métodos de trabajo, actitudes y capacidades del alumno que de otra forma no son fácilmente observables. En consecuencia, se convierte en una fuente inmejorable de datos para la evaluación del proceso formativo.

Fracciones

Antes de presentar las dos actividades siguientes, tengo que decir que el tema de fracciones siempre me ha preocupado y sorprendido, tanto por la importancia del mismo como por las dificultades que los alumnos encuentran en él. No es extraño dar con alumnos de cursos bastante elevados que tienen dificultades considerables no sólo en las operaciones con fracciones sino en la comprensión de los conceptos básicos relativos a las mismas. Por lo tanto, no es fortuito que las actividades se refieran a fracciones, aunque aquí, y en cualquier otra actividad, como ya ha quedado indicado anteriormente, el motivo podía haber sido sustituido por cualquier otro ya que lo fundamental es el trabajo desarrollado con la actividad, independientemente del contenido.

Estas actividades, bastante más formalistas que la anterior, consisten en completar fichas como las que se presentan en las figuras 2 y 3. Son actividades que pueden utilizarse tanto para mejorar la asimilación de los conceptos iniciales que aparecen en la definición de fracción: unidad, partes iguales en que se divide la unidad, numerador, denominador, etc., como para evaluar el nivel de consecución de estos contenidos. Gran importancia tienen en ellas el uso adecuado del lenguaje propio de las fracciones y la formación de frases que ayuden a una mejor comprensión de los contenidos trabajados. El éxito o fracaso de este tipo de actividades, se refieran a fracciones o a cualquier otro contenido, depende en gran medida de la actuación del profesor que las aplique: pueden perder todo su atractivo y convertirse en tediosas y contraproducentes o atraer al alumno y hacer que éste se esfuerce considerablemente.

Fracción

Unidad: Cantidad considerada:

Fracción que representa la cantidad considerada: $\frac{\square}{\square}$

Completa las siguientes frases

Para formar la cantidad considerada hemos necesitado ....; cada una la hemos .... en .... partes .... y hemos tomado un total de .... partes.

El denominador de la .... representa el .... de partes .... en que hemos dividido cada ....

El .... de la fracción representa el .... de partes .... que hemos tomado para formar la cantidad considerada.

División representada por la fracción

División entera: División con decimales:

Completa las siguientes frases

La fracción del ejemplo representa .... unidades .... y ....
.... iguales de la ....

El cociente de la división entera significa el .... de ....
completas que representa la ....; y el resto de la división entera significa el .... de .... iguales que hemos tomado de la última .... para completar la .... que representa la ....

El .... decimal que representa esta .... es ....

Fig. 2

Fracción y número mixto			
Fracción	División entera que representa	Frase que la expresa	La fracción en forma de número mixto
$\frac{9}{4}$			
	$\begin{array}{r\|l} 7 & 2 \\ \hline 1 & 3 \end{array}$		
		Esta fracción representa 3 unidades completas divididas en 5 partes iguales cada una y 2 partes más de las 5 partes iguales en que está dividida la cuarta unidad	
			$2\frac{3}{7}$

Fig. 3

Estas actividades en las que aparecen expresiones incompletas o espacios vacíos son de gran versatilidad, y permiten adaptarlas al nivel de los alumnos a los que vayan dirigidas. Asimismo, presentarlas para su trabajo en grupos heterogéneos puede ser una forma muy enriquecedora tanto para los más avanzados como para los que necesiten reforzar sus conocimientos.

Contar, contar y contar

Las siguientes actividades son más propias de primaria que de secundaria, pero en no pocos alumnos que llegan a 1° de ESO se observan deficiencias considerables en la asimilación del sistema de numeración decimal. Este hecho hace que su progresión en el aprendizaje se vea ralentizada e, incluso, anulada. Estas actividades pueden ayudar tanto a introducir el sistema de numeración decimal como a resolver problemas de esta índole en alumnos que ya lo deberían haber asimilado.

La figura 4 corresponde a una ficha en la que el alumno ha de contar las bolas de los montoncitos, colorear del color de las bolas los cuadros de las centenas, las filas de las decenas y las unidades sueltas, según vaya colocando las bolas en la rejilla, determinar el número de centenas, decenas y unidades coloreadas y escribir el número correspondiente. Lógicamente, para llegar a esta ficha es necesario haber propuesto otras similares más sencillas, con unidades y decenas exclusivamente.

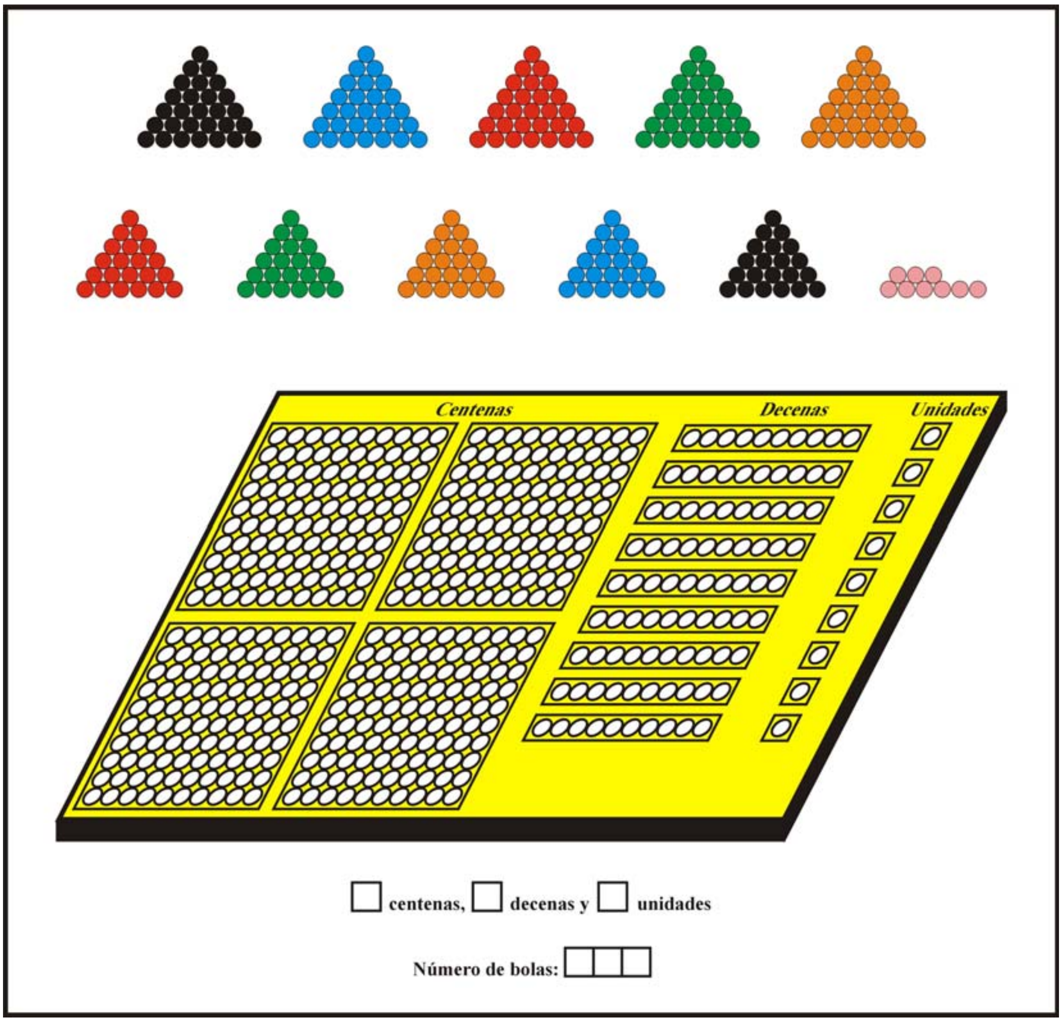


Fig. 4

Esta actividad obliga al alumno a pararse a reflexionar antes de empezar a colorear, a realizar un gran número de recuentos, a repasar los conceptos de centena, decena y unidad, y a establecer estrategias, que suelen ser variadísimas de unos alumnos a otros, y que se pueden aprovechar para que exponga los motivos que lo llevan a adoptarlas, y, si así fuese necesario, a rechazar decisiones erróneas o a cambiar unas por otras mejores.

Me ha sorprendido siempre el afán que los alumnos ponen a la hora de contar y colorear estas fichas que de antemano pueden parecer aburridas y agotadoras.

Las figuras 5 y 6 son fichas en las que se ha de escribir la expresión numérica de la cantidad representada en ella.

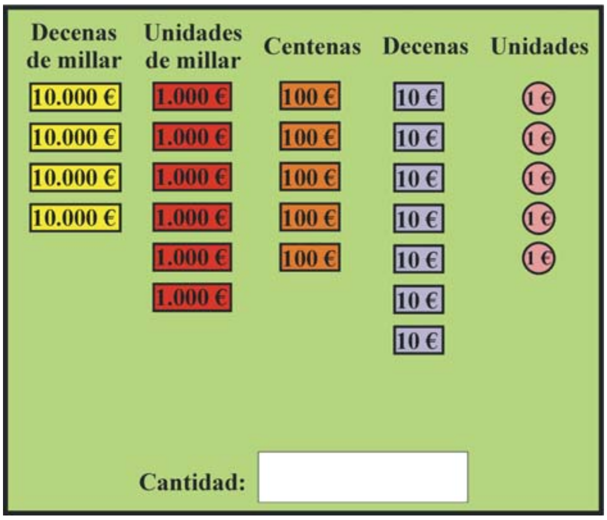


Fig. 5

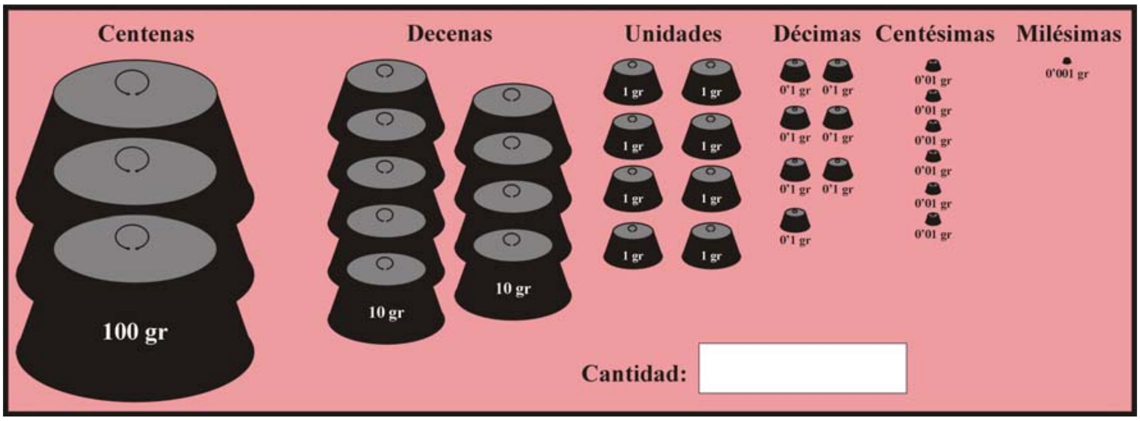


Fig. 6

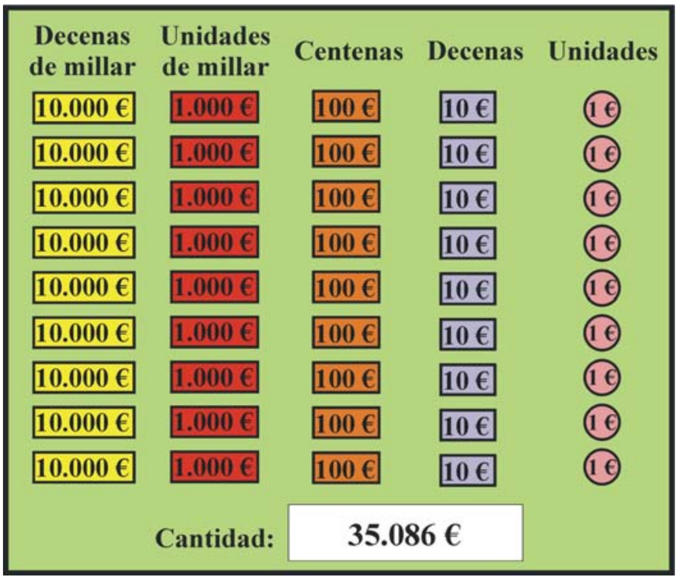


Fig. 7

En la de la figura 7, actividad inversa a las anteriores, se han de eliminar los billetes que sobren para dejar la cantidad representada por el número que aparece en ella.

Ni que decir tiene que se precisa de una buena colección de estas fichas para que estas actividades cumplan la función que en ellas se pretende. Como en cualquier otra actividad, su elaboración y presentación mediante el ordenador pueden dotarlas de la facilidad de manejo y del atractivo suficientes y, a veces, imprescindibles, para que los alumnos las reciban con agrado y muestren una actitud favorable a las mismas, lo que puede ser determinante para la consecución de los objetivos que nos propongamos.

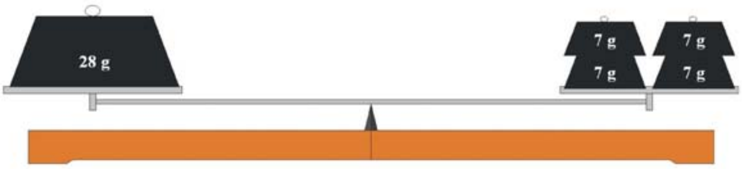
Imágenes y conceptos

Con la siguiente actividad, figura 8, pretendo mostrar una forma de presentación que utilizo bastante con mis alumnos. En ella intento relacionar la imagen (que siempre vale más que mil palabras) con los conceptos y con la nomenclatura propia de las

Matemáticas. Pienso que este tipo de presentación mejora ostensiblemente la asimilación de conceptos que en ocasiones resultan excesivamente escabrosos y complejos para los alumnos.

En este ejemplo, dedicado a los conceptos de múltiplo y divisor, considero importantísima la inclusión de la multiplicación y la división exacta como operaciones relacionadas directamente con las ideas de “ser múltiplo de”, “ser divisor de” o “ser divisible por”. Como en toda actividad, en ésta, la actuación del profesor es decisiva.

Múltiplo y divisor:

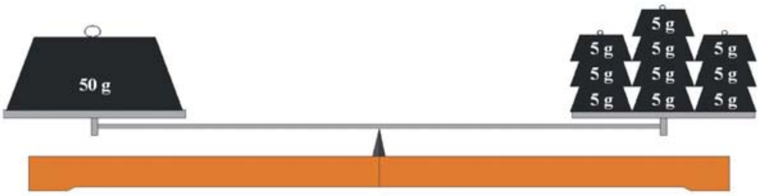


$\square \times \square = \square \quad \Rightarrow \quad \square$ **es .... de** $\square$

$\begin{array}{r|l} 28 & 7 \\ \hline 0 & 4 \end{array} \quad \Rightarrow \quad \square$ **es .... de** $\square$

o

$\square$ **es .... por** $\square$

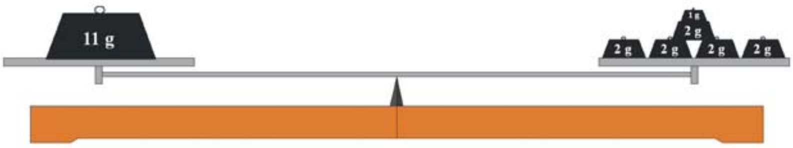


$\square \times \square = \square \quad \Rightarrow \quad \square$ **es .... de** $\square$

$\begin{array}{c|c} \square & \square \\ \hline \square & \square \end{array} \quad \Rightarrow \quad \square$ **es .... de** $\square$

o

$\square$ **es .... por** $\square$



$\square \times \square + \square = \square \quad \Rightarrow \quad \square$ **...... es .... de** $\square$

$\begin{array}{c|c} \square & \square \\ \hline \square & \square \end{array} \quad \Rightarrow \quad \square$ **...... es .... de** $\square$

o

$\square$ **...... es .... por** $\square$

Fig. 8

Es recomendable realizar pesadas, o que los mismos alumnos preparen algunas, con distintos juegos de pesas, en las que se puedan trabajar los conceptos desarrollados en esta actividad. Igualmente, pueden prepararse fichas semejantes sustituyendo las pesadas por medidas de longitud o capacidad con distintos juegos de unidades.

Vida cotidiana

En este apartado pretendo presentar una forma de trabajo que he utilizado en bastantes ocasiones con alumnos de la desaparecida EGB y, en alguna ocasión, con los de la materia de Refuerzo de Matemáticas de 1º de ESO. En ella se pretende que, a partir de la presentación de un posible supuesto real, el grupo de alumnos acabe definiendo el que se vaya generando a partir de sus intervenciones (preguntas, sugerencias, etc.), establezca las estrategias de actuación, y le dé una solución.

Tanto la forma de presentar los supuestos como su tratamiento pueden ser de gran diversidad. Para concretar, uno que presenté en alguna ocasión es el siguiente:

Un colegio de nueva creación recibe 7 camiones cargados con 80 pupitres cada uno. El colegio tiene 21 aulas que se han de equipar con los pupitres que se han recibido.

Lo primero que sorprende a los alumnos es la ausencia de pregunta. Cosa lógica porque están acostumbrados a que cada problema lleve su pregunta correspondiente. Sin embargo, en este caso la pregunta estaría fuera de sitio ya que son ellos los que han de definir la situación final. Esto da pie a numerosísimas intervenciones de preguntas y propuestas entre ellos mismos: si todas las aulas han de tener el mismo número de pupitres, si sería conveniente que quedaran algunos pupitres sin utilizar, etc. Al final serán ellos los que establezcan las condiciones que definan el supuesto.

Según el nivel de los alumnos y dependiendo de las dificultades que hayan aparecido, se pueden proponer actividades de apoyo muy variadas que ayuden a la comprensión, interpretación y aclaración de los elementos que van contextualizando el supuesto. Así, en distintas ocasiones he propuesto algunas como las siguientes:

- Presentación escrita de los elementos considerados por el grupo y del texto que exponga el supuesto final.
- Lectura individual y en grupo de los textos elaborados.
- Debate sobre los textos elaborados.
- Dibujo individual que represente el supuesto final establecido.
- Redacción individual de una historia que contemple el supuesto final establecido (fue altamente sorprendente la riqueza y variedad de historias relativas a esta situación y a otras).
- Exposición oral por parte de cada alumno de la historia que ha escrito.
- Debate sobre la correspondencia de las distintas historias con el texto elaborado por el grupo.

En la definición del supuesto y en el establecimiento de las estrategias a seguir, se abre un abanico enorme de posibles actuaciones del profesor: concreción y discusión de las condiciones que definen el supuesto, concreción y discusión de las estrategias establecidas, orientación en la toma de decisiones y en la discusión de las mismas, orientación en las operaciones que hay que utilizar, interpretación de los resultados obtenidos en las mismas, etc.

En todas las actividades, sean del tipo que sean, la intervención del profesor es determinante: sus preguntas y propuestas intencionadas, aprovechando las situaciones que se produzcan en el desarrollo de las mismas, pueden dar pie a indagaciones, planteamientos nuevos, debates, etc., que sean determinantes para la consecución de la trascendencia referida en la introducción. Sirva como muestra una pregunta muy recomendable en muchas de las situaciones que aparecen en la actividad que ahora nos ocupa. Consiste en peguntar al alumno por qué ha realizado una operación determinada (por ejemplo: por qué ha multiplicado 80 por 7). La contestación del alumno es, casi siempre, la siguiente: “Para saber cuántos…”. Claramente la respuesta no atiende a la pregunta. Intervenir para hacerle ver que no se le ha preguntado “para qué” sino “por qué” suele causar un cierto desconcierto inicial en el alumno que inmediatamente se convierte en origen de interesantes razonamientos por parte del mismo, en interés general en el resto de compañeros, y en el comienzo de nuevos derroteros para la actividad. Igual efecto causa la propuesta de trabajar eliminando la posibilidad de usar la multiplicación y la división; o, al contrario, la de no usar la resta sustituyendo a la división (algo muy común en algunos alumnos).

Actividades como la presentada dan pie, si el grupo de alumnos lo aconseja, a realizar incursiones en otros campos matemáticos. Así, la Geometría ofrece una variedad enorme de actividades que pueden servir de complemento a la actividad principal: construcción de figuras (un camión, por ejemplo) mediante figuras geométricas sencillas, estudio de los elementos y las propiedades de las figuras geométricas utilizadas, cálculo de perímetros y áreas, etc.

Son muy numerosas las capacidades que esta forma de trabajo puede ayudar a desarrollar: no exclusivamente aquéllas que pueden considerarse puramente matemáticas, sino otras muchas relacionadas con distintos aspectos de la formación del alumno.

Clave secreta

Esta actividad, incluida a veces en la sección de pasatiempos de la revista *Margine@.es*, publicada por el Instituto Español de Andorra, puede dar pie a situaciones de mucho provecho en el aula. Consiste en averiguar la clave secreta por medio de la que se relacionan, de forma biunívoca, diez letras con las diez cifras del sistema decimal. La figura 9 puede servir de ejemplo.

Las letras A, B, C, D, E, F, G, H, I y J, corresponden, en una clave secreta, a las cifras del sistema decimal (del 0 al 9). ¿Sabría desvelar esta misteriosa clave con las pistas que a continuación se dan?

C : H = H

I - J = D

A + D = H

F : A = A

J + A = E

J - D = G

Fig. 9

Las pistas que definan cada clave secreta determinarán la dificultad de la actividad. Esta dificultad puede ajustarse a muy diversos niveles educativos, por lo que esta actividad puede proponerse tanto a grupos de Primaria como de ESO y Bachillerato.

Aunque la característica esencial de este tipo de actividades sea el razonamiento, no es despreciable, ni mucho menos, la variedad de estrategias que se pueden usar, la importancia de la toma de decisiones, el uso de diagramas o el gran número de validaciones de supuestos que en ellas se presentan. Además, es muy común la preferencia de los alumnos por la comprobación de supuestos arbitrarios basados en la intuición, capacidad nunca despreciable, en disfavor del razonamiento lógico. Hecho, éste, que se puede aprovechar para reconducir sus planteamientos hacia el método científico, aunque sin despreciar el talento intrínseco que encierra una cierta dosis de intuición.

Taller de Matemáticas

No quiero acabar esta presentación sin traer a estas páginas una muestra de las actividades que propuse a un grupo de alumnos de 4º de ESO en la materia de Taller de Matemáticas, durante el curso 2006-2007. Para mí, esta materia inicialmente representó un reto y finalmente se convirtió en un trabajo realmente fascinante.

La ausencia de libros de texto y la existencia de un currículo de la materia totalmente abierto, en el que se podían leer frases como éstas: "El trabajo de taller, que ha de hacerse cooperativamente en muchas ocasiones, ofrece buenas oportunidades para aprender a relacionarse y a trabajar dentro de un grupo.", "En este ámbito se refuerzan la capacidad de trabajar en equipo, el gusto por el trabajo bien hecho, el diseño y realización reflexiva de modelos materiales, el fomento de la imaginación y de la creatividad.", o "Algunas de las características que pueden definir la diferencia en el tratamiento de los contenidos son: el carácter práctico y manipulativo de sus actividades, la posibilidad de favorecer el trabajo sobre contextos reales y extramatemáticos, el refuerzo del papel del profesor como animador y «desbloqueador», la mayor posibilidad de trabajo en grupo y sin restricciones de tiempo, etc.", hicieron que me animara a llevar a cabo un trabajo que en pocas ocasiones se puede realizar y del que tanto los alumnos como yo quedamos muy satisfechos. Tengo que decir que el comienzo no fue nada fácil, y, tanto ellos como yo, necesitamos de un buen tiempo para acoplarnos y entender cómo tenía que desarrollarse un trabajo de grupo que debía extenderse a lo largo de todo el curso y al que ninguno de nosotros estaba demasiado acostumbrado. También es justo decir que era un grupo de alumnos con una gran preparación y una muy buena predisposición hacia las Matemáticas.

Después de unas sesiones de toma de contacto y repaso de conocimientos básicos que me sirvieron para conocer mejor a cada alumno, se repartieron en grupos de cuatro sin que yo tuviese que intervenir casi nada en el reparto. La primera dificultad fue encontrar la forma de funcionamiento de cada grupo. Ésta fue distinta de unos a otros, aunque en cada uno, algo que era de esperar, aparecieron integrantes que tomaron la iniciativa sin que por ello quedaran anulados los demás compañeros. Desde mi posición intenté que se turnaran la dirección de las distintas actividades para que todos se sintieran necesarios y tomaran conciencia de su pertenencia al grupo.

No fue casualidad que me decantara por actividades de Geometría. Aparte mi inclinación casi innata, considero que las oportunidades que este campo ofrece al docente son inagotables.

Empezamos por actividades sencillas de cálculo de perímetros y áreas, como la de la figura 10, en donde se tuviesen que aplicar conocimientos básicos de cursos anteriores (algunos de los cuales se incorporaban a modo de notas en el texto de la actividad), y que sirvieran como preparación para abordar situaciones más complejas.

Calculad el perímetro y el área de la figura, expresando los resultados en las unidades de longitud y de superficie indicados en la cuadrícula.

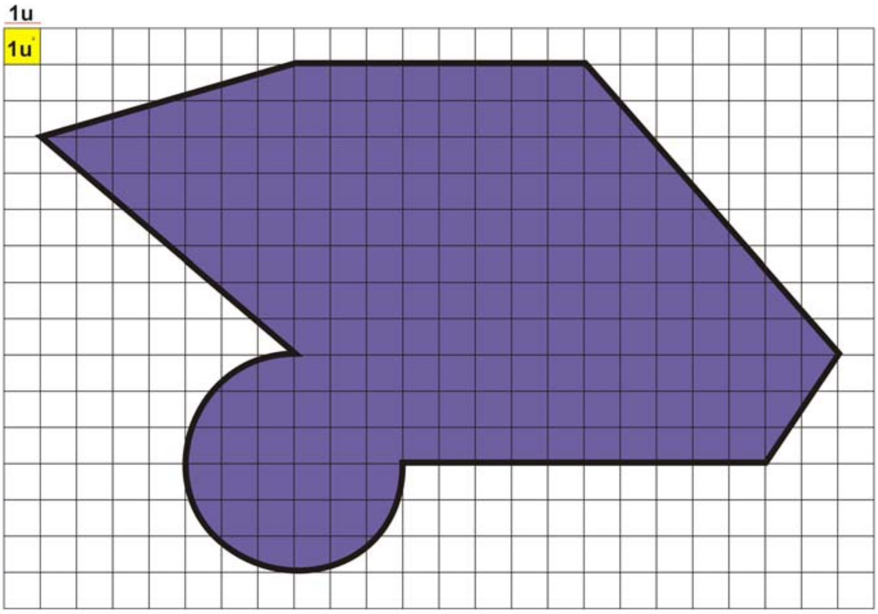


Fig. 10

No quedaron relegadas a segundo plano, sino que tuvieron un papel fundamental, actividades imaginativas, creativas y manipulativas, como la representada en la figura 11.

¿Cómo cortaríais el rectángulo de abajo en dos trozos con los que pudierais formar un triángulo isósceles con la misma área que el rectángulo dado? ¿Cuántos triángulos distintos podríais formar? ¿Cuánto medirían la altura y la base del triángulo en cada caso?

Fig. 11

En el rombo de abajo, una de sus diagonales es el doble de la otra. Necesitamos conocer su lado, su perímetro y su área en función de la diagonal menor.

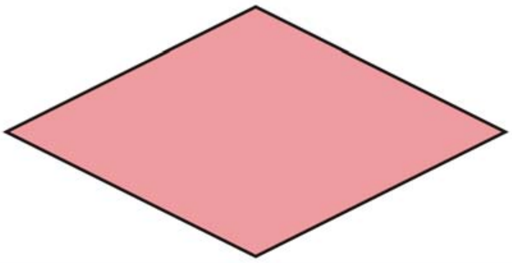


Fig. 12

Gran importancia tuvieron, y, a veces, grandes dificultades, las actividades en las que la Geometría se aliaba con el álgebra, como la expuesta en la figura 12.

Y qué decir de aquéllas en las que se mezclaba la Geometría con el Álgebra y con la imaginación. Un ejemplo es la descrita en la figura 13. Esta actividad era posterior a otra similar con un valor concreto para el lado del cuadrado inicial y servía como generalización a lo realizado en esta última. Posteriormente se presentaban dos actividades similares, con triángulos equiláteros: la primera general y la segunda particular. De esta forma trabajamos casos de generalización y viceversa.

Dibujad un cuadrado cuya área sepáis que es igual a la mitad de la del cuadrado dado y expresad su lado en función del lado del cuadrado inicial. Dibujad otro cuadrado cuya área sea la mitad del que habéis dibujado antes y expresad su lado en función del lado del cuadrado inicial. Si repitierais la operación "n" veces, ¿cuál sería la expresión del área y del lado del cuadrado finalmente obtenido en función respetivamente del área y del lado del cuadrado inicial? ¿Observáis algo que relacione la variación del lado y la del área?

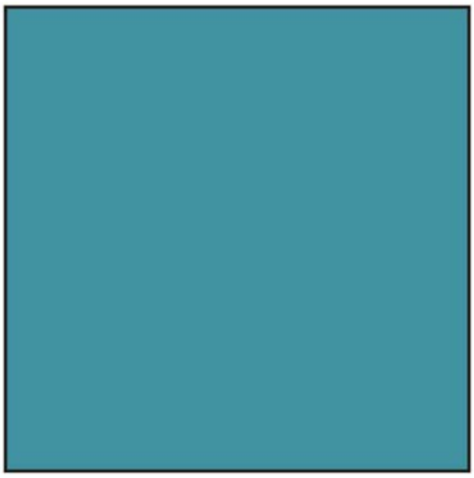


Fig. 13

Sirva como ilustración el dibujo de la solución a esta actividad (figura 14).

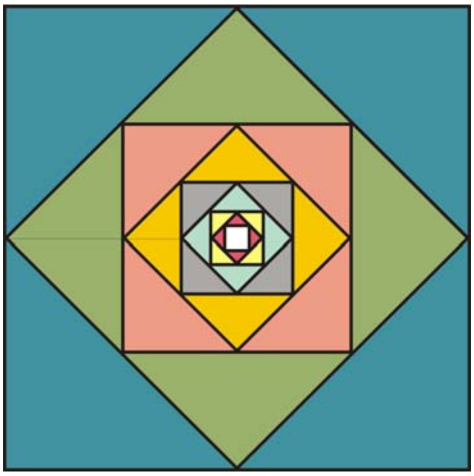


Fig. 14

Como era de esperar, importancia fundamental tuvieron las actividades de aplicación de lo estudiado a situaciones prácticas. Las figuras 15 y 16 muestran dos de estas actividades.

En la instalación del dibujo, un bloque ha de sostenerse por un cable sujeto a los extremos del techo de una sala de 11 m de anchura y 9 m de altura. El cable que sujeta el bloque ha de formar un ángulo de 90º y el bloque, de 2'10 m de altura, ha de quedar a una distancia del suelo de 2'10 m. ¿Qué longitud ha de tener el cable que se utilice para la instalación?

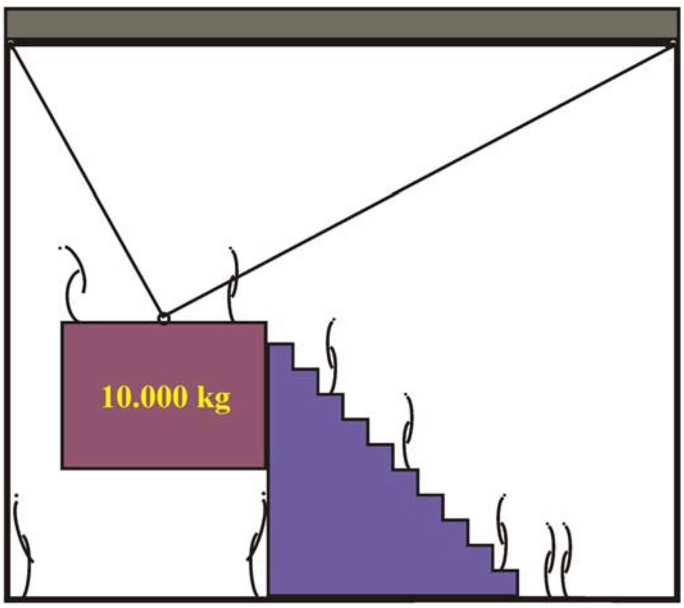


Fig. 15

La celosía de la figura está formada por un bastidor en el que se consideran cuatro cuadrados iguales. En cada cuadrado se inscribe una corona circular de radios 25 y 12,5 cm, circunscrita a otro cuadrado. En cada corona circular se recortan 8 círculos tal como indica la figura. Queremos que el área vacía de la celosía, por la que entre la luz blanca, sea aproximadamente de 0,65 m^2. ¿Cuál ha de ser el radio de los círculos recortados en las coronas circulares para que esto ocurra?

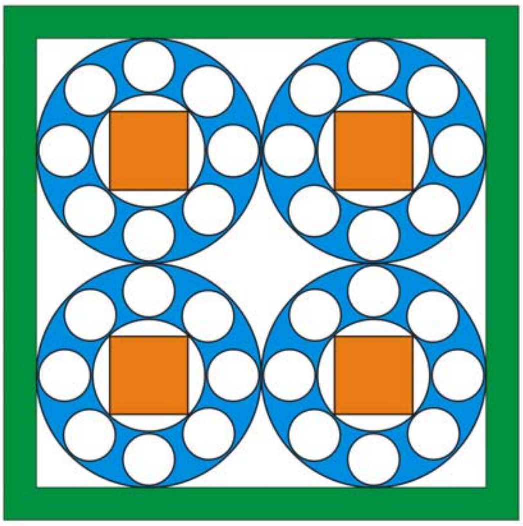


Fig. 16

Como colofón utilicé una propuesta de trabajo en la que a través de la vida de un personaje ficticio de la antigua Grecia, Alguíenes, nos acercábamos al número áureo y al rectángulo de oro. Sirva de ejemplo de esta actividad la presentación que aparece en la figura 17, en la que se plasma la obtención sucesiva de rectángulos de oro (en amarillo) a partir de un cuadrado cualquiera.

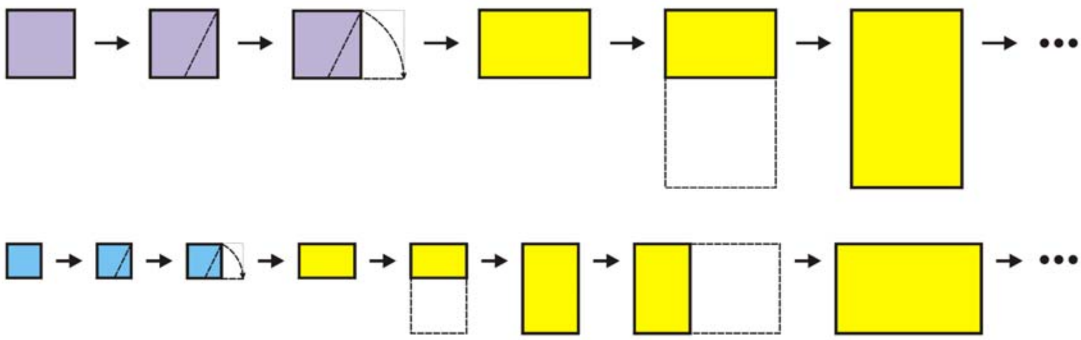


Fig. 17

Estas actividades pueden servir de aproximación al trabajo realizado por este grupo de alumnos del Taller de Matemáticas; aunque lo fundamental no fueron en sí las actividades sino el ambiente de trabajo cooperativo que apareció y el esfuerzo de la totalidad de ellos para superar en grupo situaciones complejas que en ocasiones rozaban los límites de sus posibilidades. Creo que este trabajo aportó un importante granito de arena a la labor llevada a cabo con estos alumnos a lo largo de su vida escolar. Labor que hizo que este grupo fuese ese año el ganador de la fase andorrana del RALLYE MATHEMATIQUE SANS FRONTIERES, organizada por el IREM de Toulouse a través del Lycée Comte de Foix.

Hasta aquí la presentación de estos materiales didácticos diversos. Espero modestamente que puedan ser de utilidad para algún lector. Si alguno desea tener más información al respecto, puede dirigirse al correo electrónico del Instituto Español de Andorra: institutoespanol.ad@educacion.es .

Longitud

Margarita García de Cortázar Nebreda

La longitud está ligada a numerosas experiencias de la vida cotidiana de los alumnos y sin embargo es un concepto abstracto, mucho menos inmediato que los de superficie o volumen. Los cuerpos tienen una extensión y ocupan un espacio pero la línea, a la que hemos de remitirnos cuando hablamos de longitudes, no es una realidad que podamos visualizar: deja de ser una línea en cuanto la dibujamos y adquiere un grosor.

Un hilo, un cabello lacio o rizado, el borde de los objetos, la distancia entre dos puntos, la altura de una montaña, la profundidad de un barranco, el recorrido de un río, su anchura, una serpentina, un alambre, el contorno de nuestra cintura, son algunos de los ejemplos que nos vienen a la mente cuando pretendemos explicar el concepto de longitud a costa, eso sí, de prescindir de los restantes atributos. ¿Es un hilo rojo, o negro? ¿Es un cabello rubio, o castaño? ¿Es un alambre grueso, o fino? No nos importan el color del hilo o el grosor del alambre; lo significativo es que somos capaces de reconocer en todas las situaciones anteriores la misma propiedad. Más aun, podemos comparar el grado con que esa propiedad se manifiesta y afirmar si lo hace con menor, igual o mayor intensidad en un objeto que en otro.

El objetivo de las siguientes actividades es tratar los conceptos de longitud y medida, sin adentrarnos en los arcanos del sistema métrico decimal. Medir no es más que comparar. Antes de establecer unidades de medida hay que acostumbrarse a comparar. En las propuestas que a continuación se presentan comparamos longitudes acudiendo a diversos procedimientos: a simple vista, por superposición, mediante instrumentos como el compás y la regla no graduada, o por aplicación reiterada de una unidad arbitraria Se presta también atención a la conversión de unidades, pero omitiendo cualquier referencia a las unidades convencionales del sistema métrico decimal. La selección de contenidos que impone la extensión de este artículo obliga a prescindir de numerosos aspectos de la medida de longitudes que a mi entender deben tener cabida en el aula, como son, sin ánimo de ser exhaustiva, los métodos y técnicas de estimación y comparación de alturas, distancias y dimensiones; la experimentación con la medida de segmentos curvilíneos; la utilización de instrumentos graduados; la implantación del sistema métrico decimal y su convivencia con medidas tradicionales, las representaciones a escala o la medida de longitudes sobre la esfera.

Las actividades están pensadas para alumnos de los últimos cursos de Primaria y del primer ciclo de Secundaria. El profesor selecciona, orienta y dirige su realización. Las tareas corresponden a los alumnos, que se organizan individualmente o en grupos. La discusión en el grupo completo sobre las observaciones que efectúen, las dificultades que puedan haber encontrado, las técnicas y procedimientos empleados o las conclusiones a las que lleguen, contribuirán indudablemente al desarrollo y afianzamiento de sus competencias matemáticas. No hay que olvidar que el propósito de las actividades no es otro que facilitar el aprendizaje mediante el hacer; no el hacer propiamente dicho. Se impone pues la reflexión individual y colectiva sobre los resultados, así como la comprensión y expresión de las propiedades, regularidades y relaciones observadas.

No he querido especificar los objetivos, contenidos y competencias de las actividades. Es una tarea ligada al uso que se haga de ellas y a la extensión y profundidad que se les quiera dar, atendiendo a las edades y capacidades de los alumnos. En coherencia con lo anterior, tampoco se establecen criterios de evaluación, cuya dependencia de los fines que se quieran alcanzar hace que no tengan sentido sin un diseño previo de intenciones y procedimientos.

Se ha optado por el formato de ficha pautada en la que el alumno escribe sus respuestas y explica los procedimientos empleados, pero el material que aquí se presenta admite modos alternativos y complementarios que nadie mejor que el profesor puede determinar. Las profundas conexiones que el tema de la medida mantiene con otros contenidos curriculares de la materia facilitan la elaboración de propuestas de ampliación de alcances muy variados.

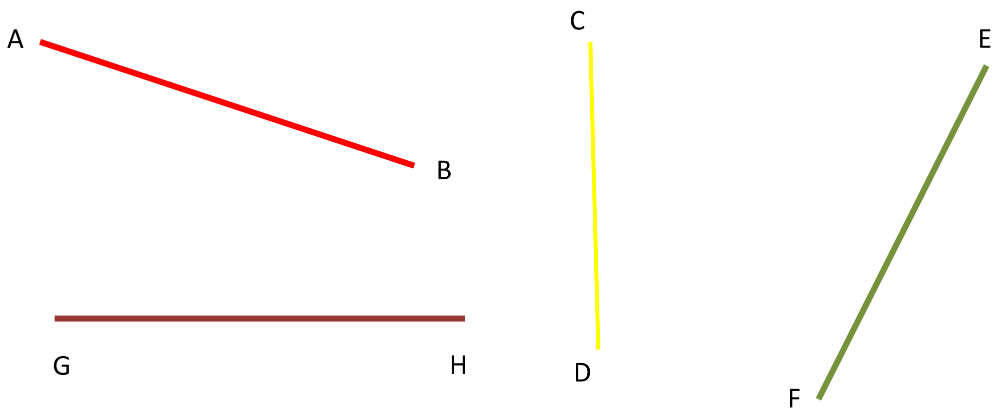
Por último, es importante que antes de iniciar el trabajo se revise el material necesario para llevarlas a cabo: regla, escuadra y cartabón no graduados, compás en buen estado, lápices, sacapuntas y goma de borrar, tijeras, papel calco, pegamento, papel milimetrado, etc.

ACTIVIDAD 1: COMPARACIÓN DE LONGITUDES

Se pretende que los alumnos ordenen diferentes objetos según su longitud, comenzando con una estimación a simple vista y pasando, acto seguido, a aplicar métodos que permitan comprobar la validez de las observaciones realizadas sin utilizar instrumentos graduados. Para ello los alumnos dispondrán de tijeras, papel calco, hilo, pegamento o cartón. Es una actividad abierta que debe realizarse en grupos. Su objetivo no es otro que propiciar la discusión, la argumentación y el debate, a la vez que ofrecer la oportunidad de considerar distintos aspectos de la longitud, como son los de distancia entre puntos, recorrido, altura, perímetro, etc.

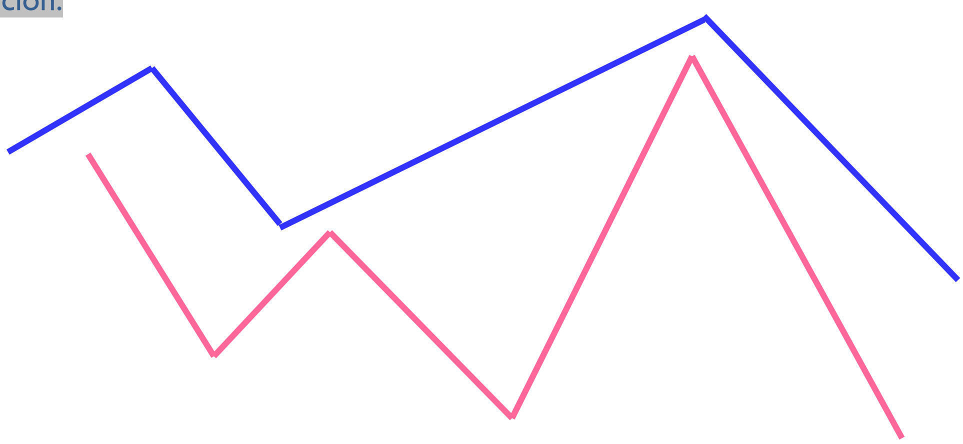
Ordena los siguientes objetos de menor a mayor longitud:

a)



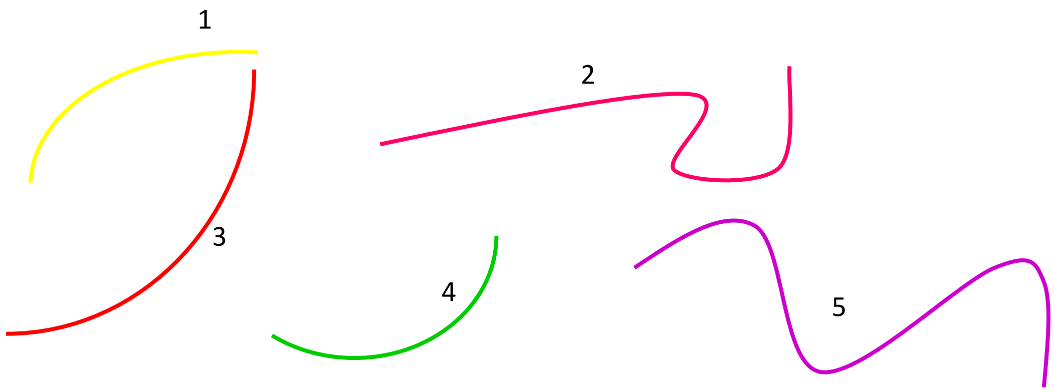
Solución:

b)



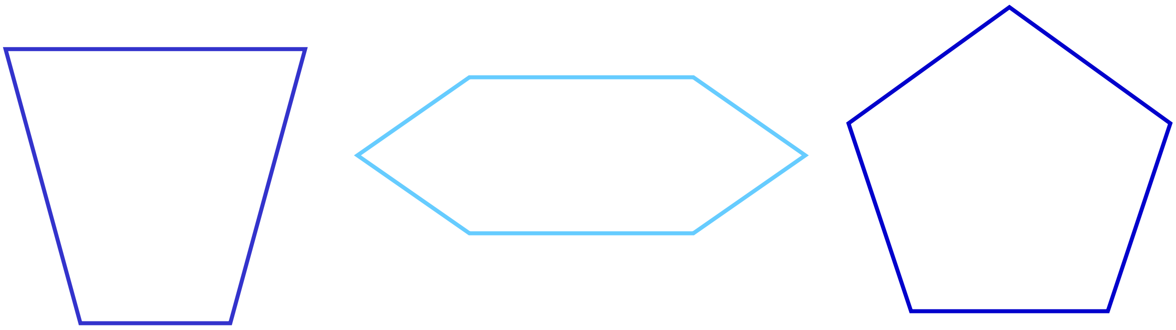
Solución:

c)



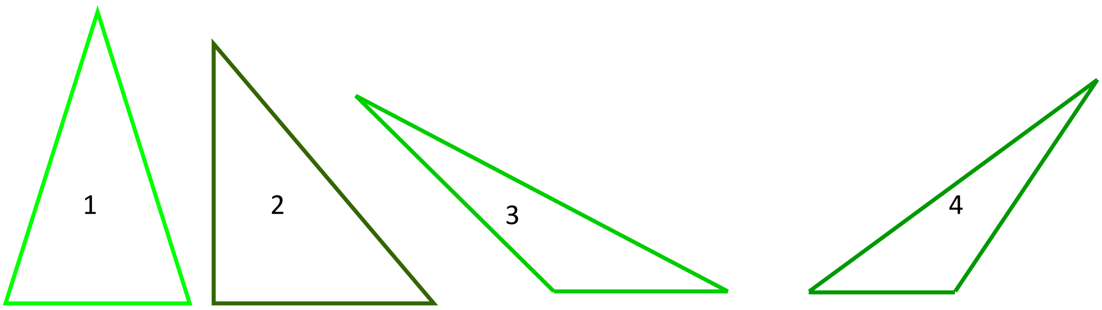
Solución:

d) Ordena de menor a mayor perímetro



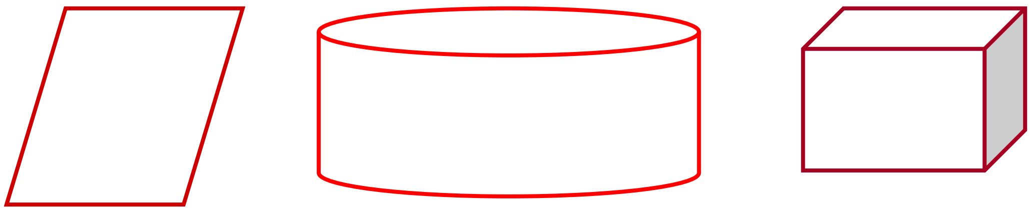
Solución:

e) Ordena según su altura los siguientes triángulos:



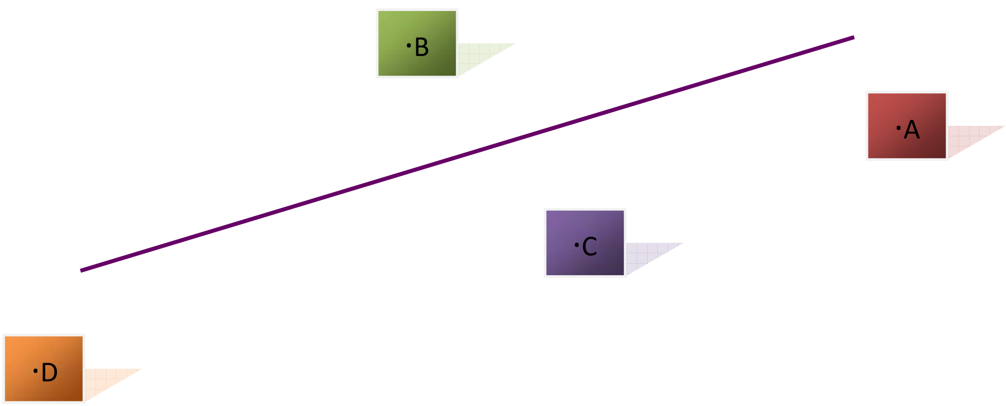
Solución:

f) Ordena según su altura las siguientes figuras:



Solución:

g) Ordena los puntos B, C, D, E y F según su distancia a la recta *r*



Solución:

Comprobación de las observaciones y resumen de las técnicas utilizadas

ACTIVIDAD 2: COMPARACIÓN DE LONGITUDES MEDIANTE EL COMPÁS

En esta actividad se utilizan los instrumentos de dibujo para verificar los resultados alcanzados en los ejercicios anteriores, excepción hecha del correspondiente a los segmentos curvilíneos, cuya comprobación puede hacerse mediante el metrolog. Seguimos trabajando la comparación de longitudes sin hacer referencia a las unidades de medida y por tanto conviene hacer uso de regla, escuadra y cartabón no graduados.

El compás ayuda a establecer el concepto de equidistancia a un punto dado y permite la medida por iteración de una amplitud marcada.

Lleva, utilizando el compás, los segmentos del ejercicio a) de la actividad anterior sobre las siguientes rectas, comenzando en cada caso por el extremo izquierdo y ordénalos según su longitud.

Solución:

Procede de igual forma con los ejercicios b), d) e), f) y g).

b)

Solución:

d)

Solución:

e)

Solución:

f)

Solución:

g)

Solución:

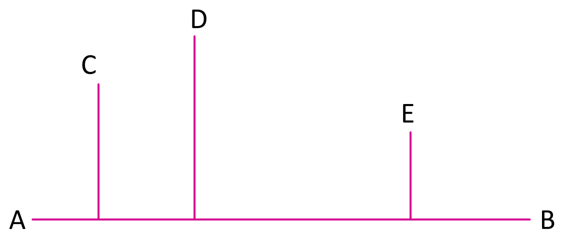
Resume tus conclusiones

ACTIVIDAD 3: CONSTRUCCIÓN DE FIGURAS CON REGLA NO GRADUADA Y COMPÁS

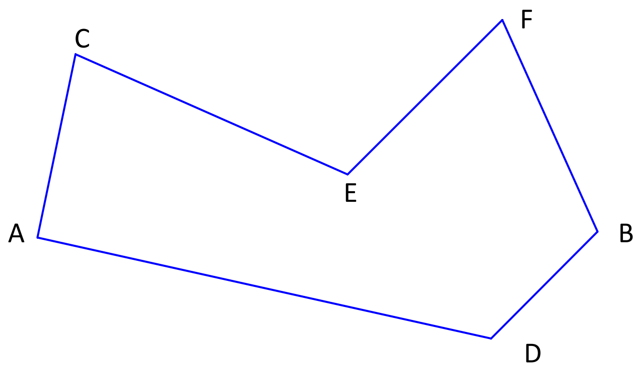
La propiedad del compás para situar puntos a una distancia determinada de un punto dado nos servirá para reproducir figuras. La exactitud de la reproducción puede verificarse por superposición.

Los alumnos suelen tener dificultades para entender e interiorizar que el punto de corte de dos arcos de circunferencia trazados desde dos puntos distintos P y Q, con radios r y r', respectivamente, se encuentra a una distancia r de P y a una distancia r' de Q. Los siguientes ejercicios utilizan esta propiedad.

Reproduce la siguiente figura utilizando el compás, la escuadra y el cartabón



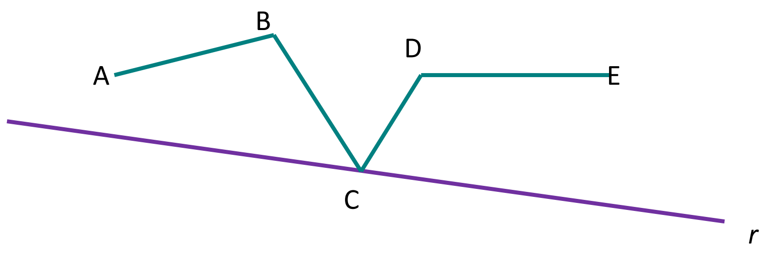
Una vez conseguida la figura anterior, no cuesta mucho comprender cómo puede reproducirse la siguiente:



Basta con ayudarse del segmento auxiliar AB, dibujar los puntos C, E, F y D y unirlos mediante segmentos. Como ya se ha sugerido, la comprobación del resultado se hará por superposición.

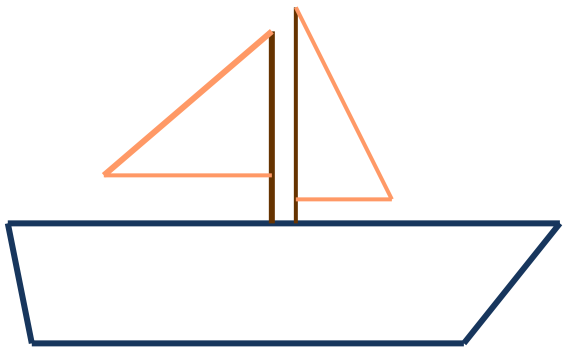
La distancia de un punto a una recta exige el trazado de perpendiculares. En la siguiente práctica se manejan los conceptos de perpendicularidad, de distancia y de simetría

Dibuja una figura simétrica de la ABCDE respecto de la recta *r*



Comprueba el resultado doblando el papel por la línea *r*

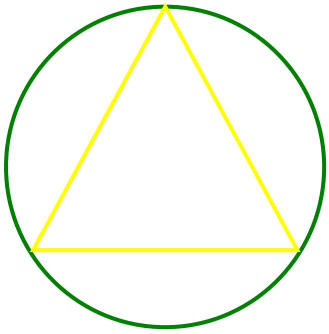
Dibuja, con regla no graduada y compás, la siguiente figura. Compara el resultado por superposición.



ACTIVIDAD 4: COMPARACIÓN DE LONGITUDES POR APLICACIÓN DE PROPIEDADES GEOMÉTRICAS

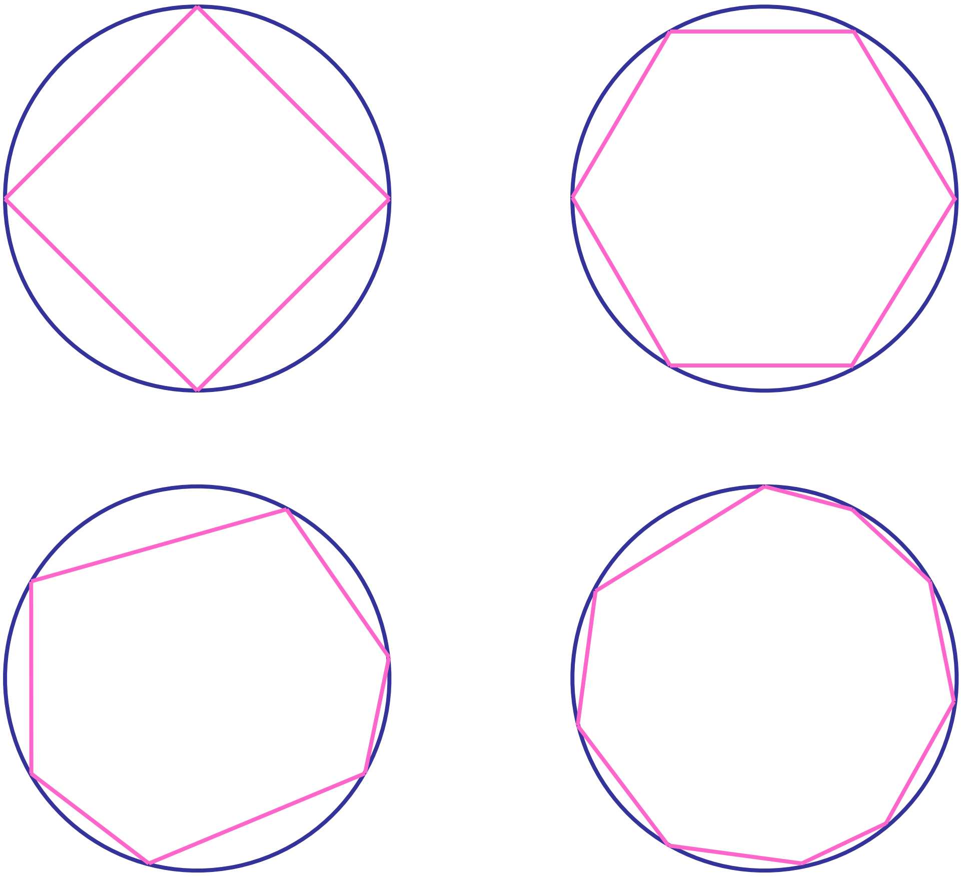
El objetivo de las siguientes actividades es que los alumnos se sirvan del razonamiento, que intenten generalizar propiedades a partir de sus observaciones. Forman parte imprescindible de este ejercicio la utilización del vocabulario apropiado, la expresión oral y escrita de las deducciones, la presentación ordenada de los argumentos y la discusión de su validez en el grupo.

¿Qué longitud es mayor, la de la circunferencia o la del perímetro del triángulo inscrito?



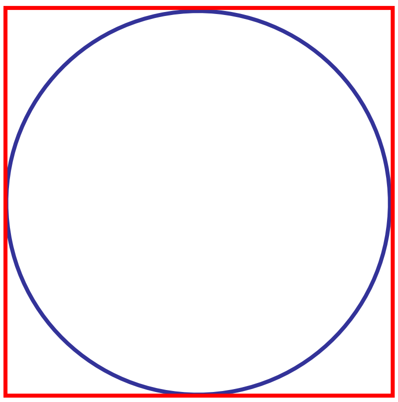
Razona la respuesta:

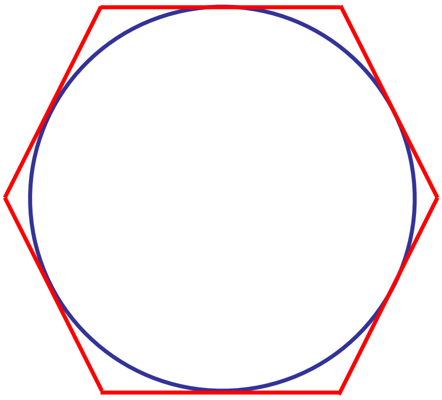
Se puede probar con polígonos convexos inscritos, regulares o no, y deducir la relación existente entre la longitud de la circunferencia y el perímetro del polígono inscritosegún el número de lados del polígono, y entre las respectivas áreas.



¿Qué consecuencias puedes deducir? ¿Serán válidas siempre que sean figuras que "quepan" dentro de la circunferencia? Razona la respuesta y pon ejemplos

¿Qué ocurrirá si los polígonos están circunscritos a la circunferencia?



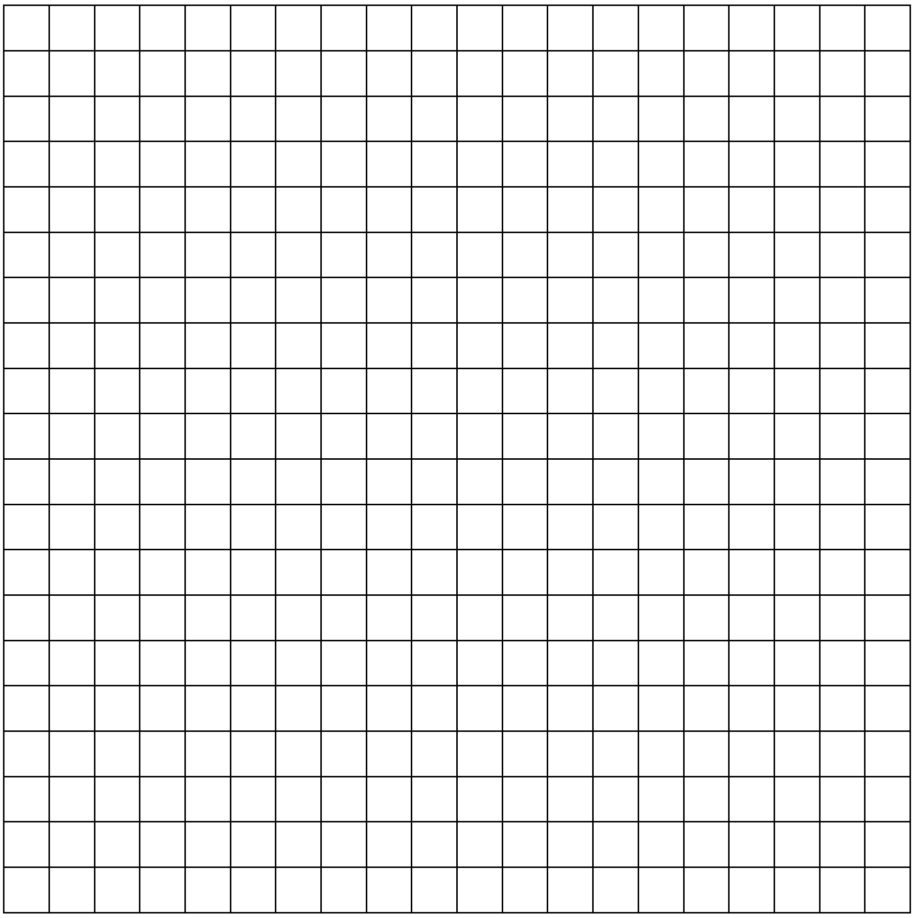


Recoge aquí tus conclusiones:

ACTIVIDAD 5: PERÍMETRO Y ÁREA

En esta actividad se trata de familiarizar al alumnado con figuras de igual perímetro y distinta área, y viceversa, con el fin de que distingan entre las magnitudes de longitud y superficie. Al mismo tiempo, los alumnos trabajan contenidos aritméticos, como la obtención de todos los divisores de un número o la descomposición de un número en sumandos.

En la siguiente cuadrícula, dibuja todos los rectángulos cuya superficie sea de 18 (14, 24, etc.), cuadrados y tengan distintas dimensiones enteras. ¿Cuántos has encontrado? ¿Cuáles son sus perímetros? ¿Cuáles son las dimensiones del de mayor perímetro? ¿Cuántos hay?



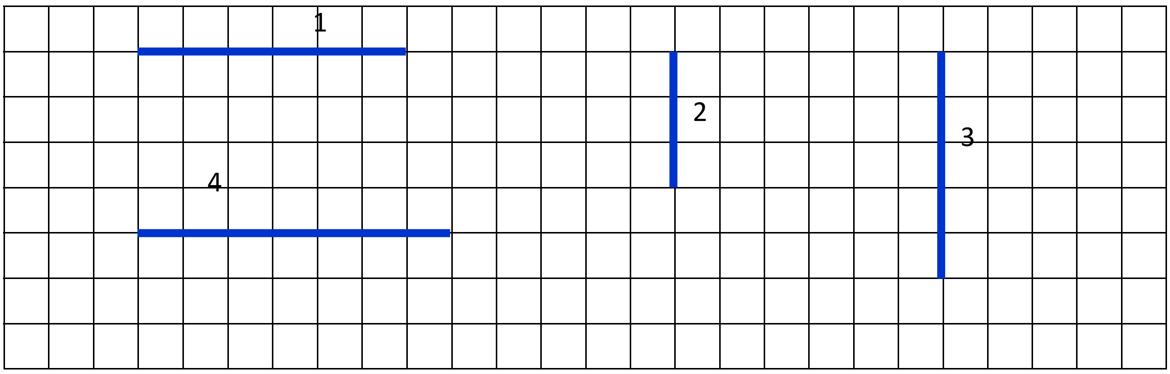
Ahora, dibuja todos los rectángulos cuyo perímetro sea 20 y calcula su área (toma como unidad de longitud el lado del cuadrado, y como unidad de superficie el cuadrado de la cuadrícula). ¿Cuántos hay? ¿Cuáles son las dimensiones del de mayor área?

Encuentra todas las figuras formadas por cuadrados de la retícula unidos al menos por un lado y cuya área sea igual a cinco cuadrados ('pentaminós'). Obtén en cada caso el perímetro. ¿Cuál es la figura de mayor perímetro? ¿Y la de menor perímetro?

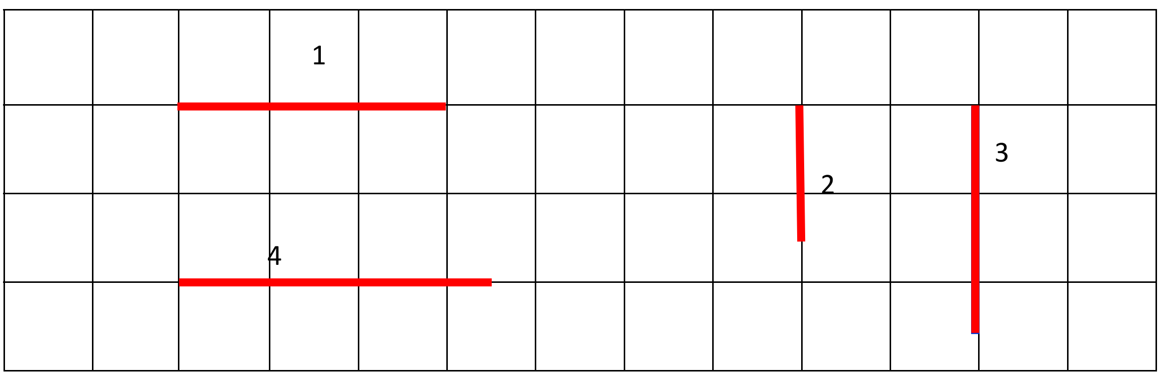
ACTIVIDAD 6: MEDIDA DE LONGITUDES

Se van a medir longitudes tomando una longitud determinada y arbitraria como unidad. La actividad puede organizarse formando cuatro o más grupos de alumnos. A cada grupo se le da una ficha para que determinen las longitudes de los mismos segmentos mediante unidades de medida diferentes. Se trata de adivinar la relación entre la propia unidad y las de los demás grupos mediante la información que éstos proporcionen.

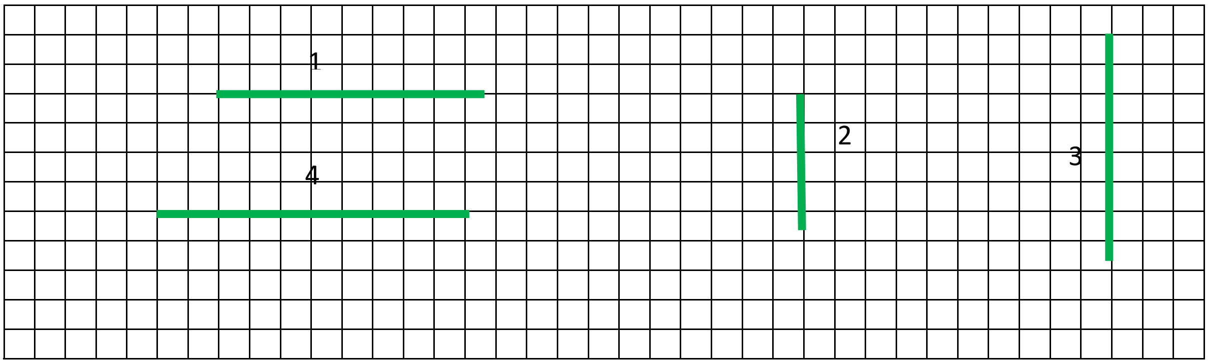
Grupo I: Determina la longitud de los siguientes segmentos, tomando como unidad el lado del cuadrado. Dadle un nombre a esta unidad.



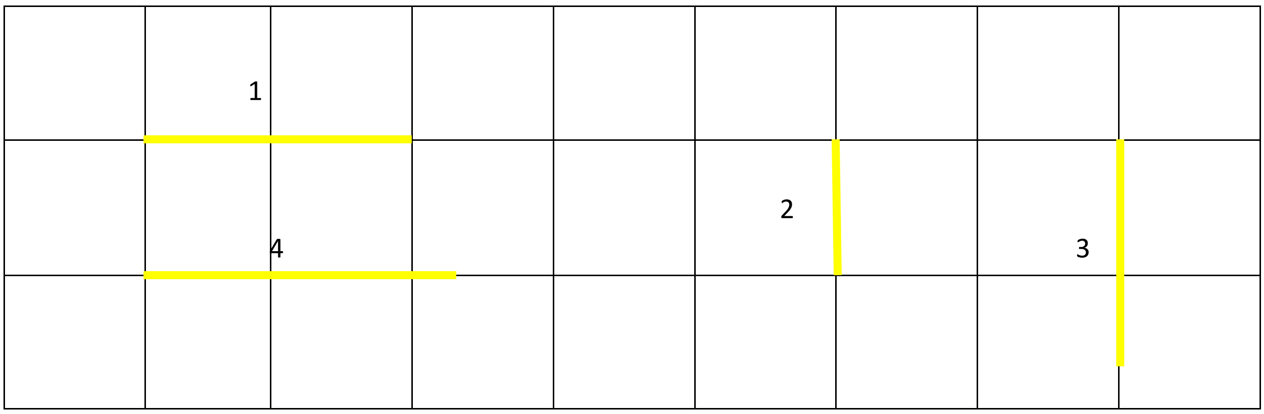
Grupo2: Determina la longitud de los siguientes segmentos, tomando como unidad el lado del cuadrado. Dadle un nombre a esta unidad.



Grupo 3: Determina la longitud de los siguientes segmentos, tomando como unidad el lado del cuadrado. Dadle un nombre a esta unidad.



Grupo 4: Determina la longitud de los siguientes segmentos, tomando como unidad el lado del cuadrado. Dadle un nombre a esta unidad.



Una vez establecida la relación entre las unidades, se puede rellenar la siguiente tabla:

Grupo	Unidad	Seg 1	Seg 2	Seg 3	Seg 4

EQUIVALENCIAS

Ejemplo de aplicación de los algoritmos de cálculo de la aritmética egipcia en Educación Primaria y Secundaria

Enrique del Río Furió

Introducción

Existe una amplia tendencia a minusvalorar los conocimientos matemáticos existentes en el antiguo Egipto en comparación con los importantes logros de los Griegos y de otras civilizaciones posteriores. No obstante, las matemáticas deben haber jugado un papel más importante en una sociedad que alcanzó el nivel de precisión mostrado en la construcción de las pirámides, la construcción de sistemas de canales de riego extensivo, la edificación de grandes graneros para el almacenamiento de las cosechas de cereal así como en la administración y gestión de su capacidad, el control del inventario tanto de provisiones y demás bienes materiales así como de personas (censo), la imposición y recaudación de impuestos así como otras evidencias de cultivos bien organizados y desarrollados.

No es objeto de este artículo mostrar el nivel de desarrollo de las matemáticas en esa época, ya existe una extensa bibliografía sobre ello, sino experimentar con los algoritmos y metodologías que utilizaban en sus cálculos y analizar su utilidad en el proceso de enseñanza-aprendizaje de nuestros alumnos desarrollando, a modo de ejemplo, algunas actividades fácilmente aplicables en el aula.

Son ampliamente conocidas las dificultades y la complejidad que, en Educación Primaria y Secundaria, originan los procesos de enseñanza-aprendizaje de conceptos, relaciones, operaciones y propiedades relacionadas con el manejo de los números, especialmente cuando trabajamos con los números racionales. Diversos trabajos de investigación en didáctica de las matemáticas así lo manifiestan.

Conocer y entender los números exige de acciones que permitan comprender su significado así como sus formas de representación, en consecuencia, cualquier práctica que contribuya a despertar el interés de nuestros alumnos por los números es evidente que resultará de utilidad para el profesorado y ese es el objetivo de este artículo: mostrar una forma diferente y en cierto modo exótica y divertida de trabajar en este bloque del currículo.

Comenzará este trabajo mostrando, brevemente, la forma de representar los números así como los algoritmos y metodologías utilizadas en el antiguo Egipto para realizar sumas, restas, multiplicaciones y divisiones para pasar, después, a desarrollar materiales que faciliten la manipulación de los símbolos numéricos jeroglíficos y terminar con unos ejemplos de actividades educativas adecuadas para las etapas y niveles a los que va dirigido este artículo. Con las actividades propuestas los alumnos desarrollarán un trabajo continuo de reconversión de unidades y de sistemas de representación numérica que les mostrará otras formas de encarar las operaciones de multiplicación y división así como la concepción de una fracción como una suma de fracciones con numerador 1 llamadas fracciones unitarias.

Finalmente indicar que la complejidad de las actividades propuestas en este trabajo las hacen especialmente indicadas para las etapas de Educación Primaria y Secundaria.

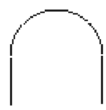
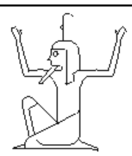
Notación, cifras y números

Notación jeroglífica de los números.

Desde los inicios del período histórico (III milenio a. J.C.) encontramos establecida en Egipto una numeración jeroglífica de tipo decimal no posicional. Los egipcios utilizaban un sencillo esquema iterativo con la ayuda de un conjunto de símbolos diferentes para cada una de las seis primeras potencias de 10. De esta forma podían tallar en piedra, madera y otros materiales números mayores al millón.

Las nueve primeras cifras están representadas por trazos verticales, uno por unidad, cada una de las potencias de 10 (la decena, la centena, el millar, etc.) por un símbolo diferente, obtenido de acuerdo con el principio ilustrado en el siguiente ejemplo: la palabra "mil", en egipcio, se pronunciaba já, que significa "loto". Así, la imagen del loto representaba 1000.

Los símbolos que utilizaban eran los siguientes:

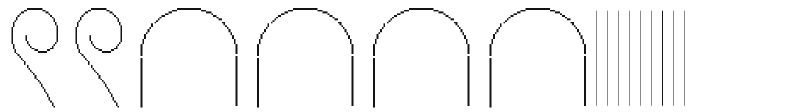
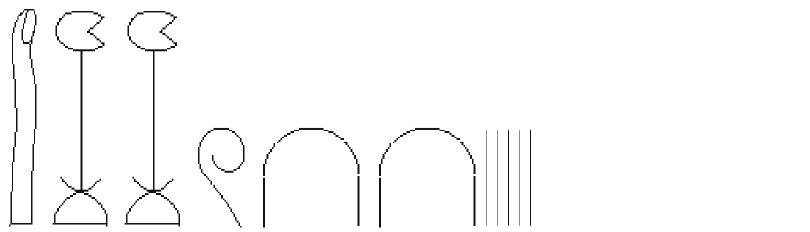
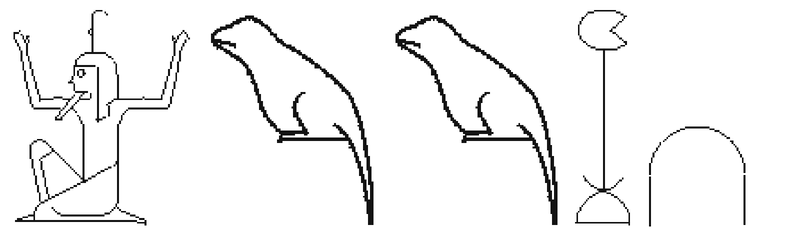
Número	Símbolo en Jeroglífico	Número	Símbolo en Jeroglífico
1 Trazo vertical		10 Cepo para ganado	
100 Rollo de cuerda		1.000 Flor de loto	
10.000 Dedo encorvado		100.000 Renacuajo	
1.000.000 Dios cuyos brazos sujetan el cielo.			

Hay que indicar, sin embargo, que existen varias interpretaciones acerca de qué podrían representar estos jeroglíficos.

Estos símbolos aparecían ordenados de mayor a menor valor unas veces de izquierda a derecha otras de derecha a izquierda e incluso de arriba abajo en vertical formando los números por agrupación de los símbolos anteriores. La disposición de los símbolos estaba regida por un principio aditivo, es decir:

- Cada símbolo era repetido tantas veces como era necesario y sus valores eran sumados para dar los del total.
- Cuando uno de los símbolos aparecía repetido 10 veces, se sustituía cada grupo de 10 símbolos iguales por el símbolo equivalente de mayor valor.

Así, por ejemplo:

	=249
	=12125
	=1201010

La mayoría de nuestro conocimiento acerca de las matemáticas del Antiguo Egipto procede no de los jeroglíficos encontrados en los templos sino de dos papiros que contienen colecciones de problemas matemáticos y sus soluciones.

- El **Papiro de Rhind** llamado así en honor de A.H.Rhind (1833-1863) quien lo compró en Luxor en 1858. Este papiro, de cerca de 6 metros de largo y 1/3 de metro de ancho, fue escrito alrededor del año 1650 AC por el escriba Ahmes (por lo que también se le conoce como **Papiro de Ahmes**) y es una copia de un documento anterior en unos 200 años. En él se pueden distinguir dos apartados:

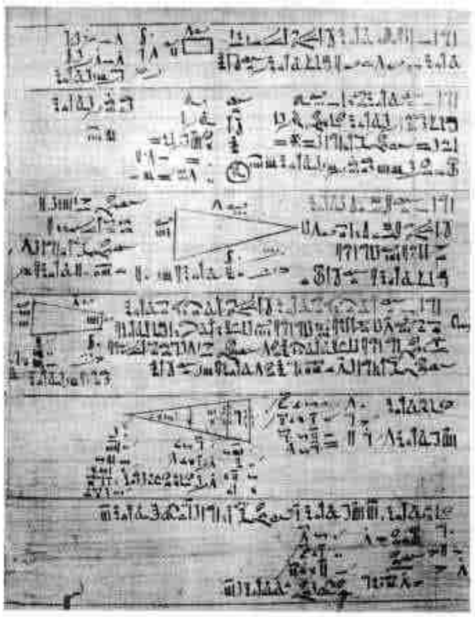
    a. **El Recto** contiene la expresión de las fracciones de numerador 2 y denominador los números impares 3 a 101 en fracciones unitarias.

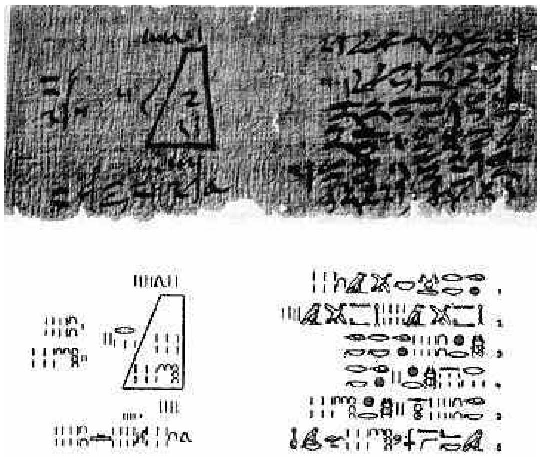
Frac.	Descomp.	Frac.	Descomp.	Frac.	Descomp.
$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{3}+\frac{1}{15}$	$\frac{2}{7}$	$\frac{1}{4}+\frac{1}{28}$
$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{6}+\frac{1}{18}$	$\frac{2}{11}$	$\frac{1}{6}+\frac{1}{66}$	$\frac{2}{13}$	$\frac{1}{8}+\frac{1}{52}+\frac{1}{104}$
$\frac{2}{15}$	$\frac{1}{10}+\frac{1}{30}$	$\frac{2}{17}$	$\frac{1}{12}+\frac{1}{51}+\frac{1}{68}$	$\frac{2}{19}$	$\frac{1}{12}+\frac{1}{76}+\frac{1}{114}$
...	...	...	...	...	...

b. **El Verso** tiene 87 problemas sobre las cuatro operaciones aritméticas, solución de ecuaciones, progresiones, volúmenes de graneros, etc.

- El **Papiro de Moscú** comprado por V. S. Golenishchev (d. 1947). Origen: 1700 AC. Tiene 15 pies de largo y 3 pulgadas de ancho.

Junto con el sistema jeroglífico los egipcios usaron, desde el principio, una escritura cursiva, llamada **hierática**, que tiene su propia notación para los números. La numeración hierática también es decimal, pero utiliza signos especiales para evitar la excesiva repetición de los símbolos del sistema jeroglífico.





Fragmento del **Papiro de Moscú**

Fragmento del **Papiro de Rhind**

La suma y la resta

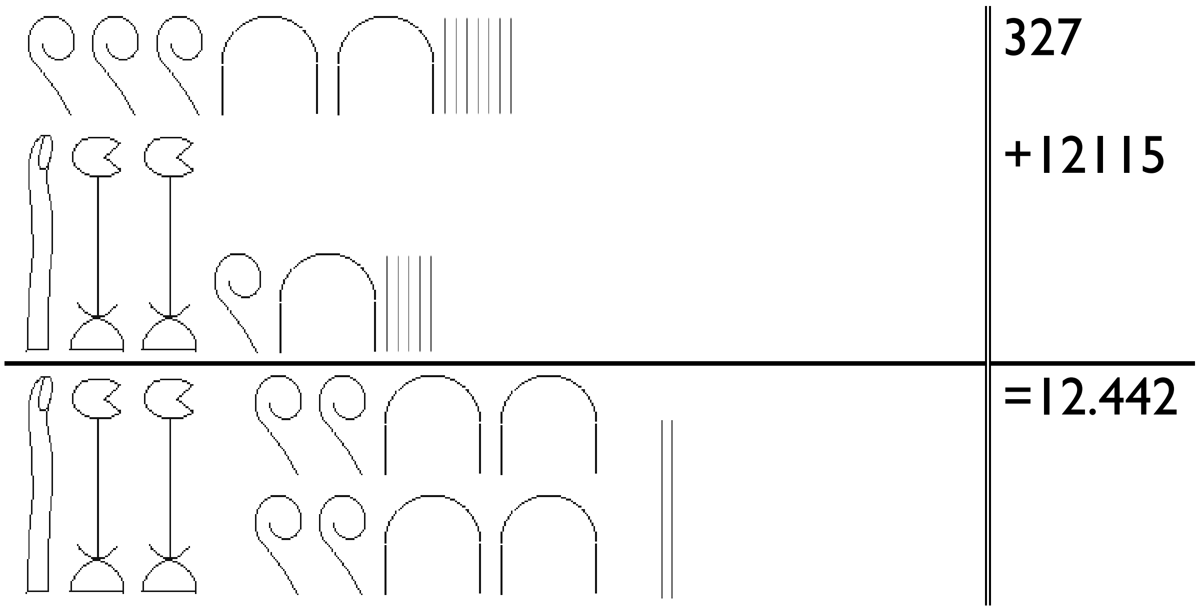
En el antiguo Egipto, la **suma** la realizaban por acumulación; es decir, agrupando los símbolos correspondientes a cada orden de magnitud no importaba la posición que ocuparan.

Como se indica en el apartado anterior, cuando alguno de los símbolos se repetía 10 veces, se sustituía por el símbolo equivalente de mayor valor.

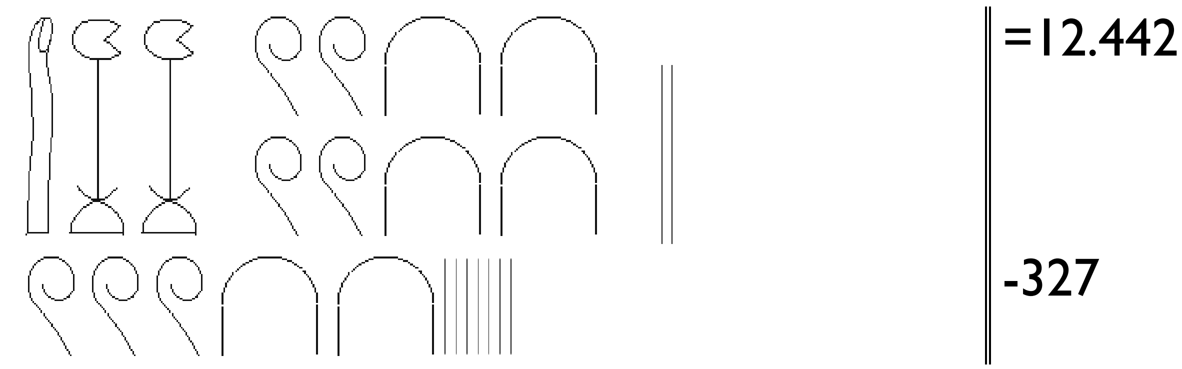
Por ejemplo, para sumar los números 327 y 12115 vemos que, al acumular los símbolos, el correspondiente a las unidades aparece 12 veces.

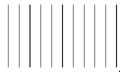
Por tanto, se sustituyen 10 símbolos por 1 símbolo  en la cantidad resultante.

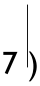
Otra característica que hay que observar es que, en la escritura egipcia, el signo + que utilizamos intercalado entre dos números para indicar su suma no aparece. Su sistema de numeración aditivo y no posicional sobreentiende que la presencia de dos símbolos numéricos seguidos se interprete como la suma de las cantidades que representan.



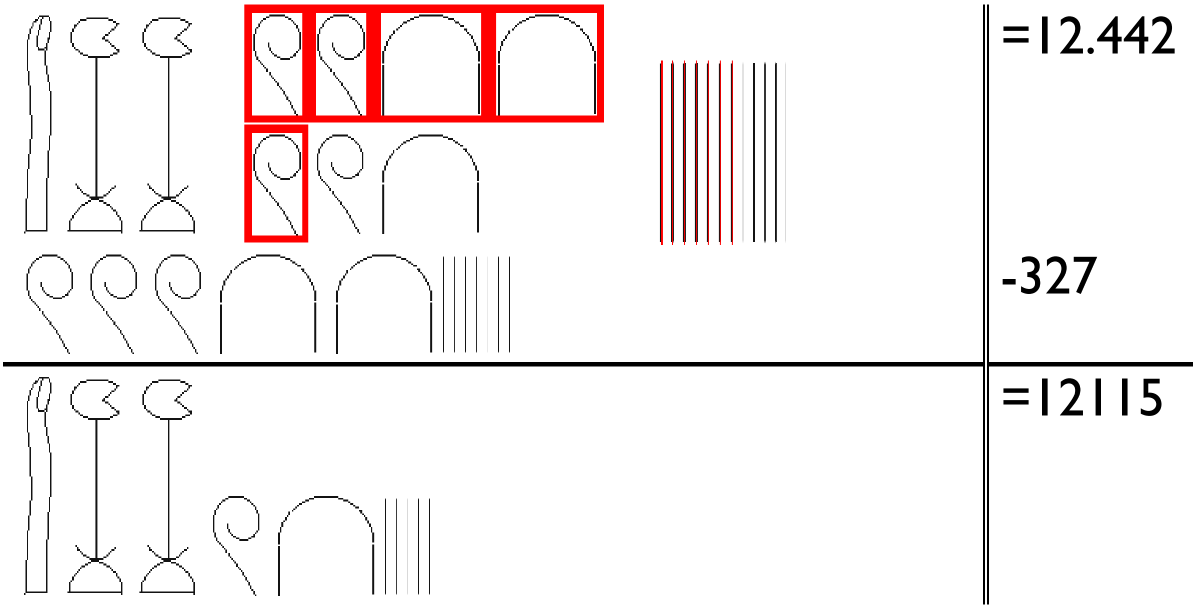
De igual forma, la resta la realizaban retirando del minuendo los símbolos que contiene el sustraendo. Así, para restar 327 a 12442:



En primer lugar se descompone uno de los símbolos correspondientes a las decenas  en 10 símbolos correspondientes a las unidades .

A continuación se van retirando del minuendo tantos símbolos correspondientes a las centenas, decenas y unidades como contiene el número del sustraendo (en este caso, 3 , 2  y 7 ).

Quedará:



Que corresponde al número 12115.

La multiplicación

La **multiplicación** la realizaban de forma binaria por un procedimiento de duplicación sucesiva.

Por ejemplo: Para realizar la multiplicación de 37 por 29, seguían los siguientes pasos:

1. Trazaban dos columnas
2. En la primera fila escribían, en la 1ª columna, el primer factor (37) y a continuación el 1 en la 2ª columna.
3. En la segunda fila escribían los dobles de los números de la primera fila.
4. A continuación, en la tercera fila el doble de los números de la segunda fila.
5. Seguían así hasta que en la segunda columna aparece un número mayor que el segundo factor de la multiplicación.

Se obtiene así la tabla siguiente:

37	*	29	
37		1	←
74		2	
148		4	←
296		8	←
592		16	←

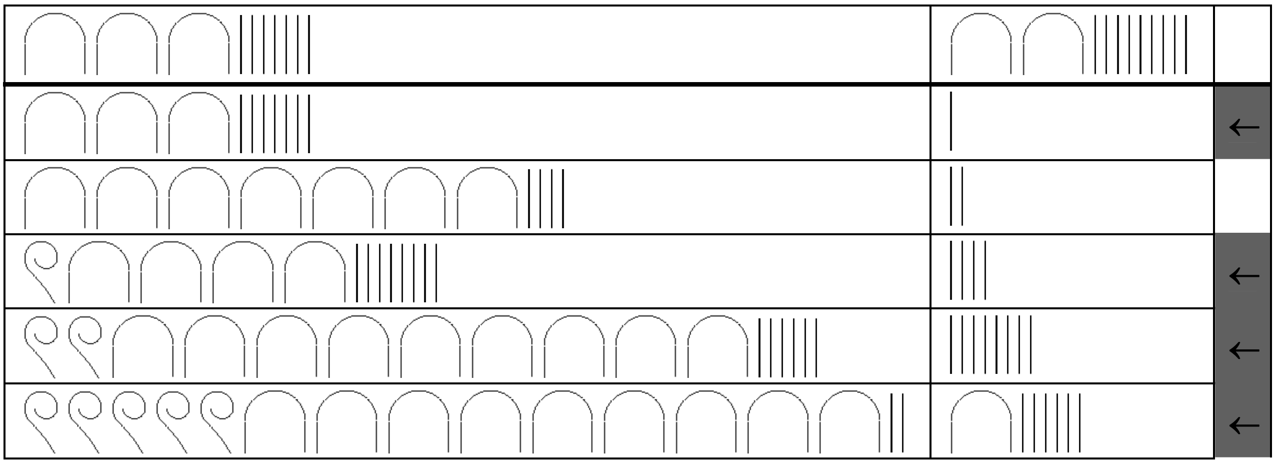
6. Marcaban en la segunda columna los números que al sumarlos obtenían el segundo factor (29). En este caso serán los números 1, 4, 8 y 16:

29=16+8+4+1

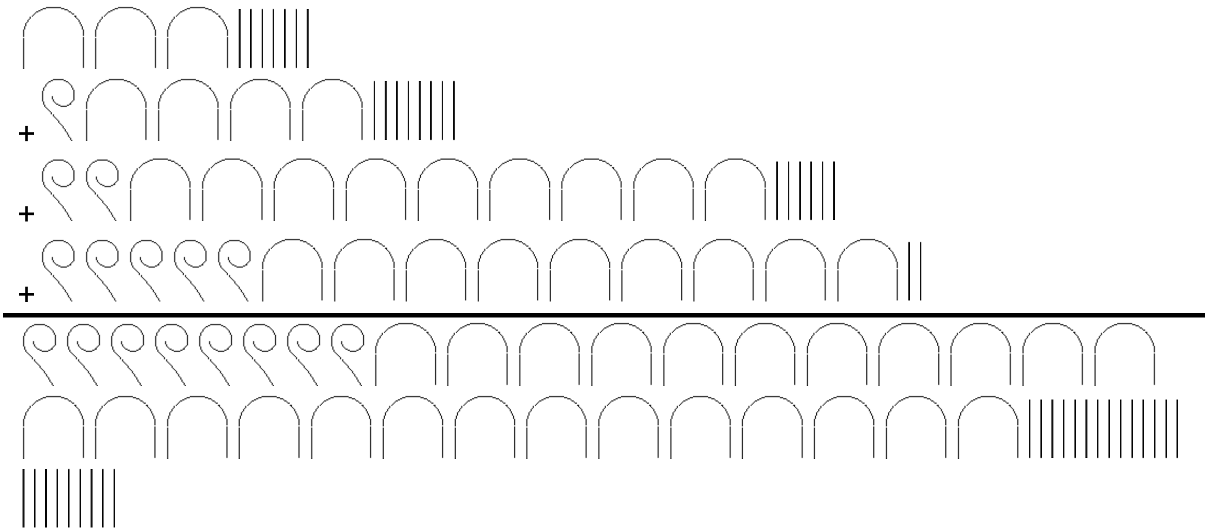
7. Finalmente, se cogían los números de la primera columna que se encuentran en las filas marcadas y los sumaban. Este será el resultado de la multiplicación.

$$\begin{aligned} 37 * 29 &= 37 * (16+8+4+1) \\ &= 592+296+148+37 \\ &= 1073 \end{aligned}$$

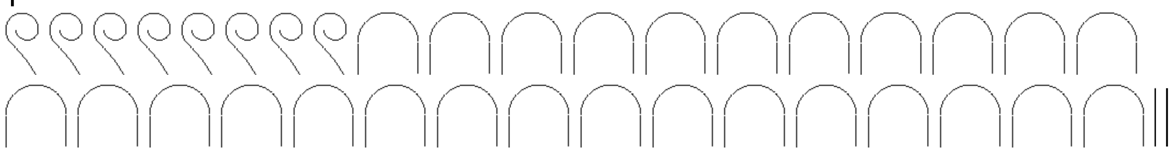
Utilizando los símbolos jeroglíficos sería:



Al escoger las filas seleccionadas y sumar se obtiene el resultado

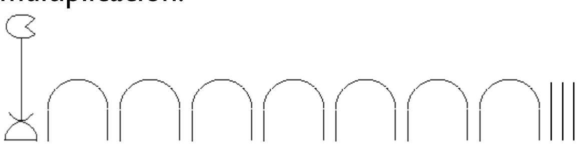


Agrupando 10 de los símbolos de las unidades y sustituyéndolo por un símbolo de decena queda:



Agrupando ahora 20 de los símbolos de las decenas en dos grupos de 10:

Y, finalmente, agrupando 10 símbolos de las centenas quedará el resultado final de la multiplicación:



La división

La **división** la realizan de forma binaria por un procedimiento de duplicación sucesiva parecido al de la multiplicación teniendo en cuenta que, en este caso, se conoce uno de los factores (el divisor) y el resultado de la multiplicación (el dividendo) lo que hay que averiguar es el número que, multiplicado por el divisor da como resultado el dividendo.

Por ejemplo: Para realizar la división de 324 por 12, seguían los siguientes pasos:

1. Se trazan dos columnas.
2. En la primera fila se escribe el 1 en la 1ª columna y a continuación el divisor (12) en la 2ª.
3. En la segunda fila se escriben los dobles de los números de la primera fila.
4. A continuación, en la tercera fila el doble de los números de la segunda fila.
5. Se sigue así hasta que en la segunda columna aparece un número mayor que el dividendo.

Se obtiene la tabla siguiente:

324	÷ 12	
1	12	←
2	24	←
4	48	
8	96	←
16	192	←
32	384	

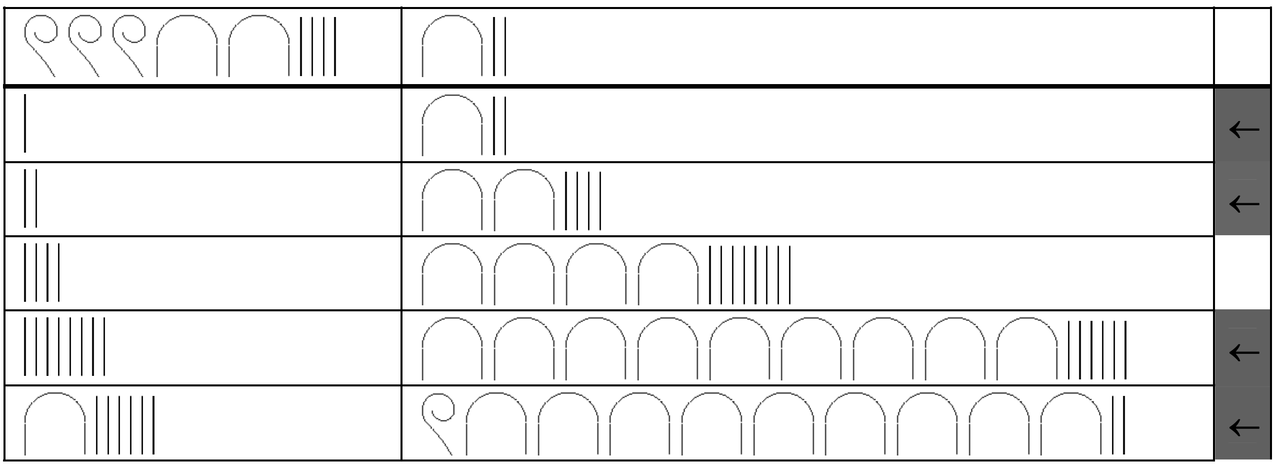
Puesto que 384 es mayor que 324, se finaliza el proceso de duplicación procediendo a buscar en la 2ª columna los números cuya suma es 324

$$
\begin{aligned}
324 &= 192+96+24+12 \\
&= 12\cdot16+12\cdot8+12\cdot2+12 \\
&= 12\cdot(16+8+2+1) \\
&= 12\cdot27
\end{aligned}
$$

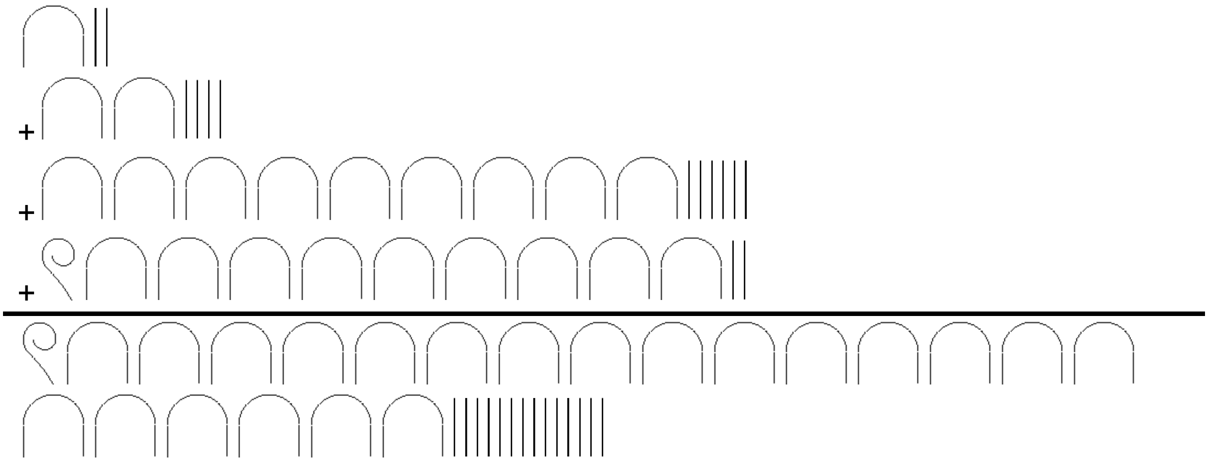
Por tanto, el resultado de la división será:

$324 \div 12 = 27$

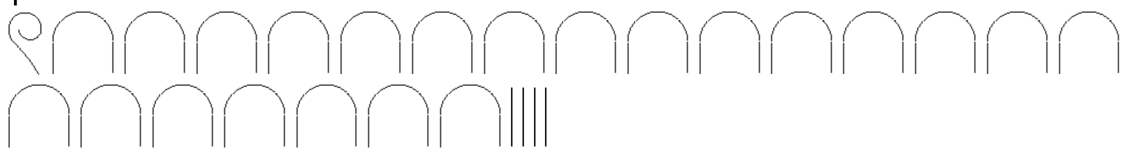
En esta división el resultado es exacto. Utilizando los símbolos jeroglíficos:



Al escoger las filas seleccionadas y sumar se obtiene el resultado



Agrupando 10 de los símbolos de las unidades y sustituyéndolo por un símbolo de decena queda:



Agrupando ahora 20 de los símbolos de las decenas en dos grupos de 10 obtendremos el dividendo:

Y, finalmente, sumando los términos equivalentes de la 1ª columna:

Agrupando 10 de los símbolos de las unidades y sustituyéndolo por un símbolo de decena queda el resultado buscado

En el caso de quedar un resto, este lo expresaban como una fracción descompuesta en suma de fracciones con numerador igual a 1 que reciben el nombre de **fracciones egípcias**.

Ejemplo: Divide: 324÷12

329	÷	12	
1		12	←
2		24	←
4		48	
8		96	←
16		192	←
32		384	

Puesto que 384 es mayor que 329, se finaliza el proceso de duplicación procediendo a buscar en la 2ª columna los números cuya suma no supere a 329:

Es decir,

$$\begin{aligned} 329 &= 192+96+24+12+5 \\ &= 12\cdot16+12\cdot8+12\cdot2+12+5 \\ &= 12\cdot(16+8+2+1)+5 \\ &= 12\cdot27+5 \end{aligned}$$

Por tanto,

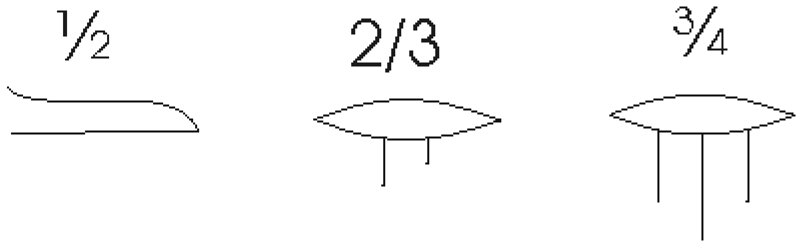
$$329 \div 12 = 27 + \frac{5}{12} = 27 + \frac{1}{3} + \frac{1}{12}$$

Fracciones

Existe cierto acuerdo entre los historiadores de la matemática en considerar el hecho de que en el antiguo Egipto:

- Las fracciones surgen en el contexto de la resolución de problemas de reparto de cantidades enteras. Son nuevas cantidades que aparecen cuando el resultado del reparto no da una unidad entera sino una parte.
- Los egipcios no conocen el significado de una fracción como un número; es decir no encuentran sentido a expresiones como por ejemplo $\frac{2}{11}$. Para ellos los números van asociados a cantidades, de forma que lo que sí entenderán es que al repartir 2 panes entre 11 personas cada una de ellas recibe $\frac{1}{6}$ de pan y $\frac{1}{66}$ de pan.
- Al repartir un objeto, en lugar de dividirlo en varias partes iguales como actualmente, procuraban hacerlo de forma que hubiera una parte de tamaño lo mayor posible y el resto en partes menores. Así, si al repartir 2 panes entre 11 personas, desde la mentalidad actual, se divide cada pan en 11 partes iguales y se dan 2 pedazos de $\frac{1}{11}$ parte del pan a cada persona, los egipcios preferían

dividir cada pan en 6 partes iguales, dar una parte a cada una de las personas

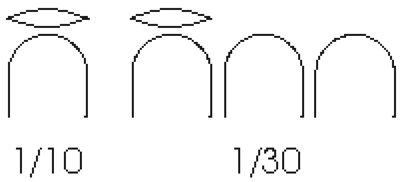


con lo que sobra una parte de $\frac{1}{6}$ de pan, posteriormente se divide esta parte en 11 partes iguales y se reparte con lo que, en total, a cada uno le ha correspondido $\frac{1}{6}+\frac{1}{66}$.

Estas consideraciones parecen deducirse del hecho (por lo que se puede ver en los documentos encontrados) que en el Antiguo Egipto utilizaban un método basado en la descomposición en *fracciones unitarias* (fracciones cuyo numerador es 1) con una excepción, $\frac{2}{3}$. Esta idea les permitía representar números como $\frac{1}{7}$ muy fácilmente; otros números como $\frac{2}{7}$ serán representados como sumas de fracciones unitarias (e.g. $\frac{2}{7}=\frac{1}{4}+\frac{1}{28}$). Además, una fracción no podía representarse como suma de dos fracciones unitarias iguales (así $\frac{2}{7}=\frac{1}{7}+\frac{1}{7}$ no era permitida) por la razón expresada antes. A una fórmula que expresa una fracción como suma de fracciones unitarias diferentes se le llama *fracción Egipcia*.

El símbolo que utilizaban para expresar una fracción unitaria era un óvalo aplanado (jeroglífico de la boca) encima del número que indica el denominador. Cuando el denominador no cabía entero bajo el signo de la "boca", escribían el excedente a continuación. Así, por ejemplo:

$$\frac{2}{15}=\frac{1}{10}+\frac{1}{30}$$



Ciertas fracciones, como ½, 2/3 y ¾ eran representadas mediante signos especiales

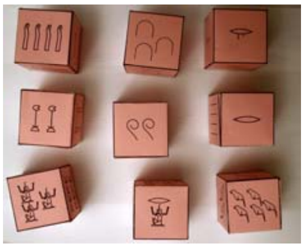
Actividades

Juegos con fichas egipcias.

Para estos juegos necesitamos construir un montón de fichas con los diferentes símbolos numéricos. Para ellos fotocopiaremos en cartulinas tantas hojas como necesitemos de la que hay en el apéndice I y las recortaremos por las líneas que hay marcadas. Hay que procurar que todas tengan las mismas dimensiones.

Juegos de identificación y lectura de números

Juegos que consisten en disponer de un montón de fichas egipcias. Se escoge un puñado de ese montón y se van colocando boca arriba sobre una mesa. A continuación se agrupan por el mismo símbolo que tiene cada una, cada grupo de 10 fichas con el mismo símbolo se sustituye por una ficha con el símbolo de la unidad superior equivalente. Finalmente se lee el número que representa y se escribe.



Con los dados en forma de cubo del apéndice 3 se puede jugar como con las fichas, lanzando un grupo de seis dados y anotando lo números que salen representados. Ordenando los dados en diferentes órdenes representarán diferentes números. Finalmente se pueden realizar operaciones con dichos números.

Juegos de habilidad operacional

Suma: Juego que consiste en coger dos puñados de fichas del montón, hacer lo indicado en el juego anterior y sumar las cantidades que representan.

Resta: Juego que consiste en coger dos puñados de fichas del montón, hacer lo indicado en el juego anterior y restar las cantidades que representan.

Multiplicación: Ídem pero multiplicando.

División: Ídem pero dividiendo.

Fracciones: Sumas, restas, multiplicaciones y divisiones de fracciones.

Fracciones: Descomposición de fracciones en fracciones unitarias.

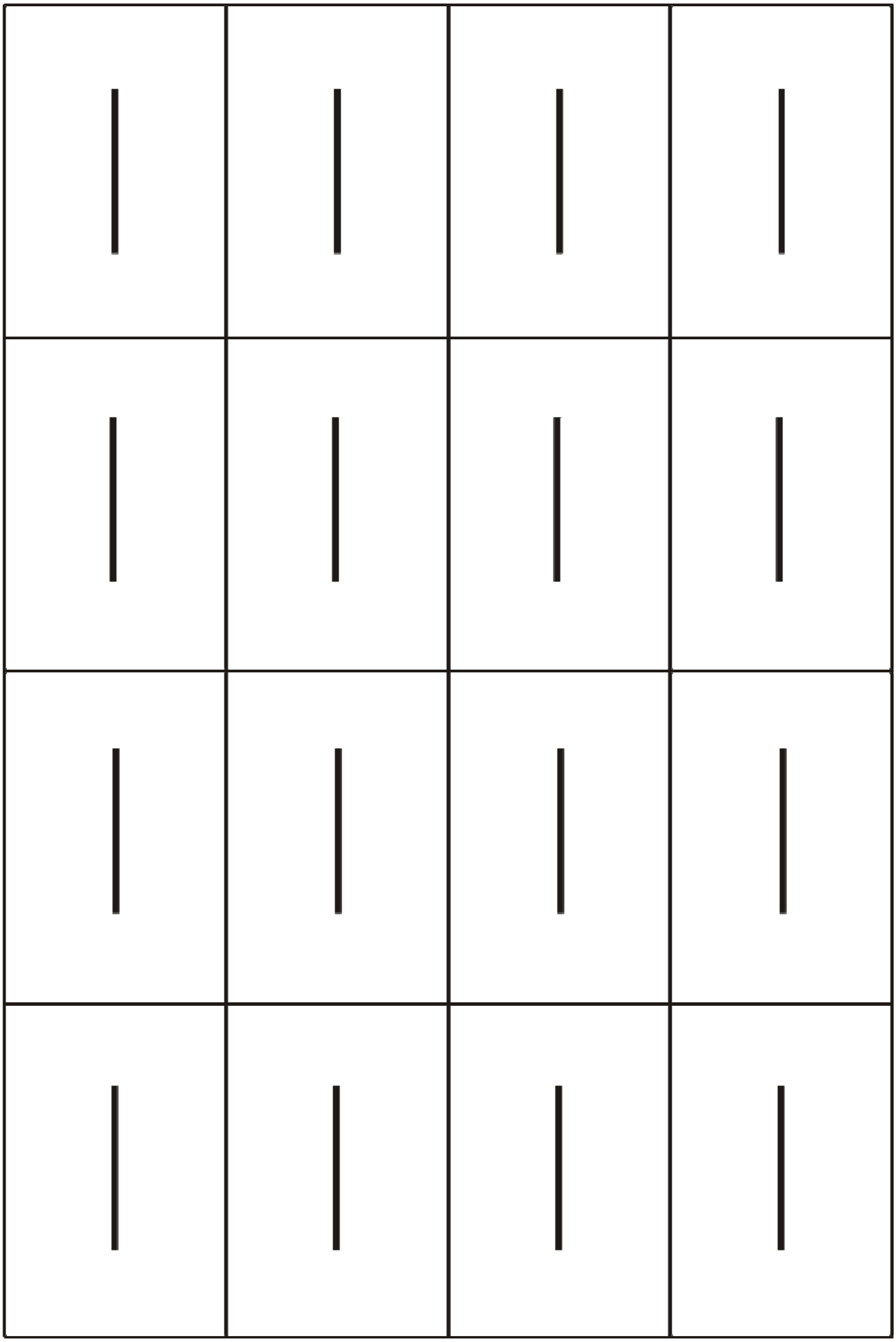
Juegos de azar con dados

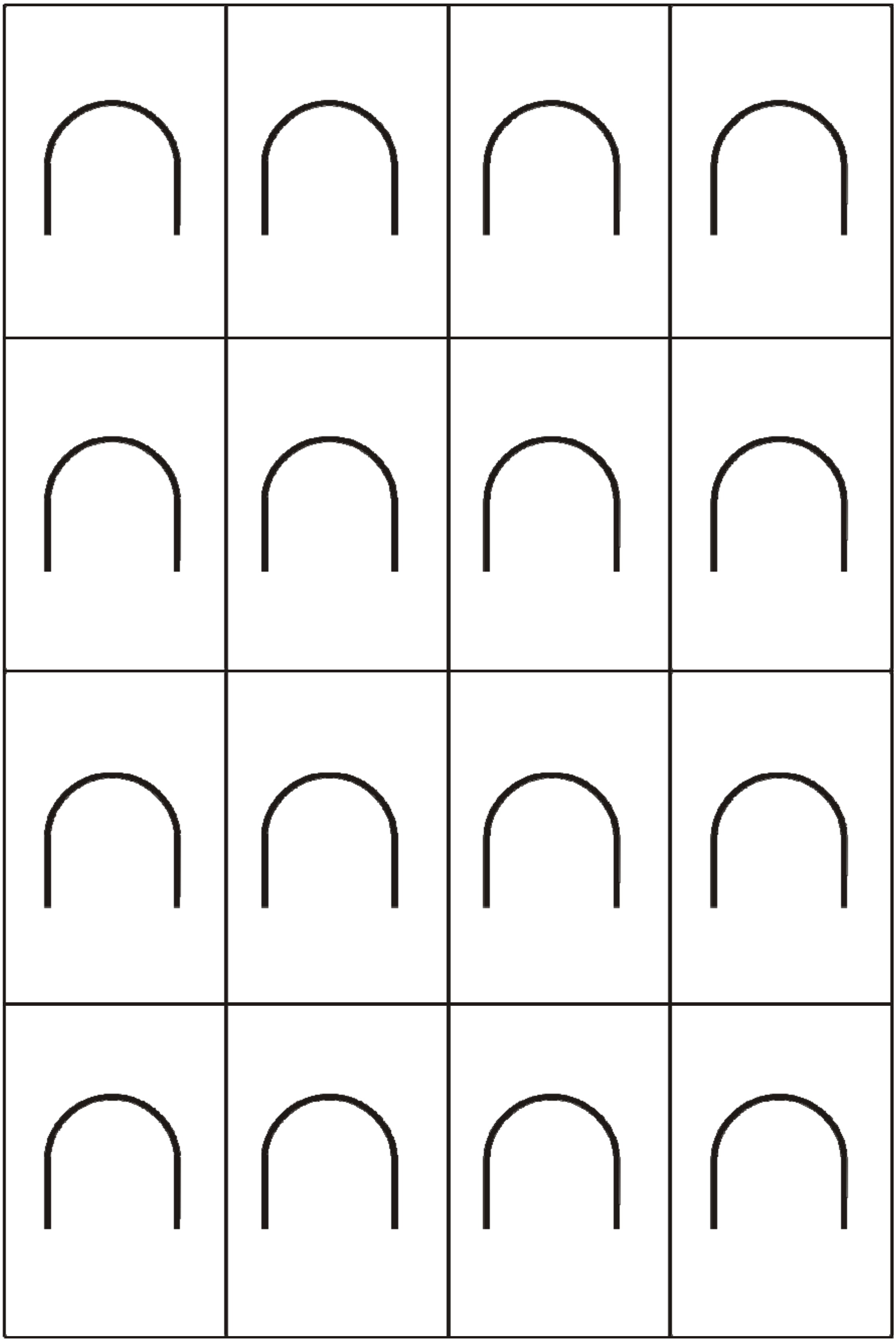
Para estos juegos necesitamos construir cinco dados como los del apéndice 2 bien en forma de octaedro o de dodecaedro. Para ello fotocopiaremos en cartulinas tantas hojas como necesitemos de las que hay en el apéndice 1, las recortaremos por las líneas que hay marcadas, las doblaremos por las aristas y pegaremos las solapas que hay dibujadas. Es importante procurar que todos los dados tengan las mismas dimensiones.

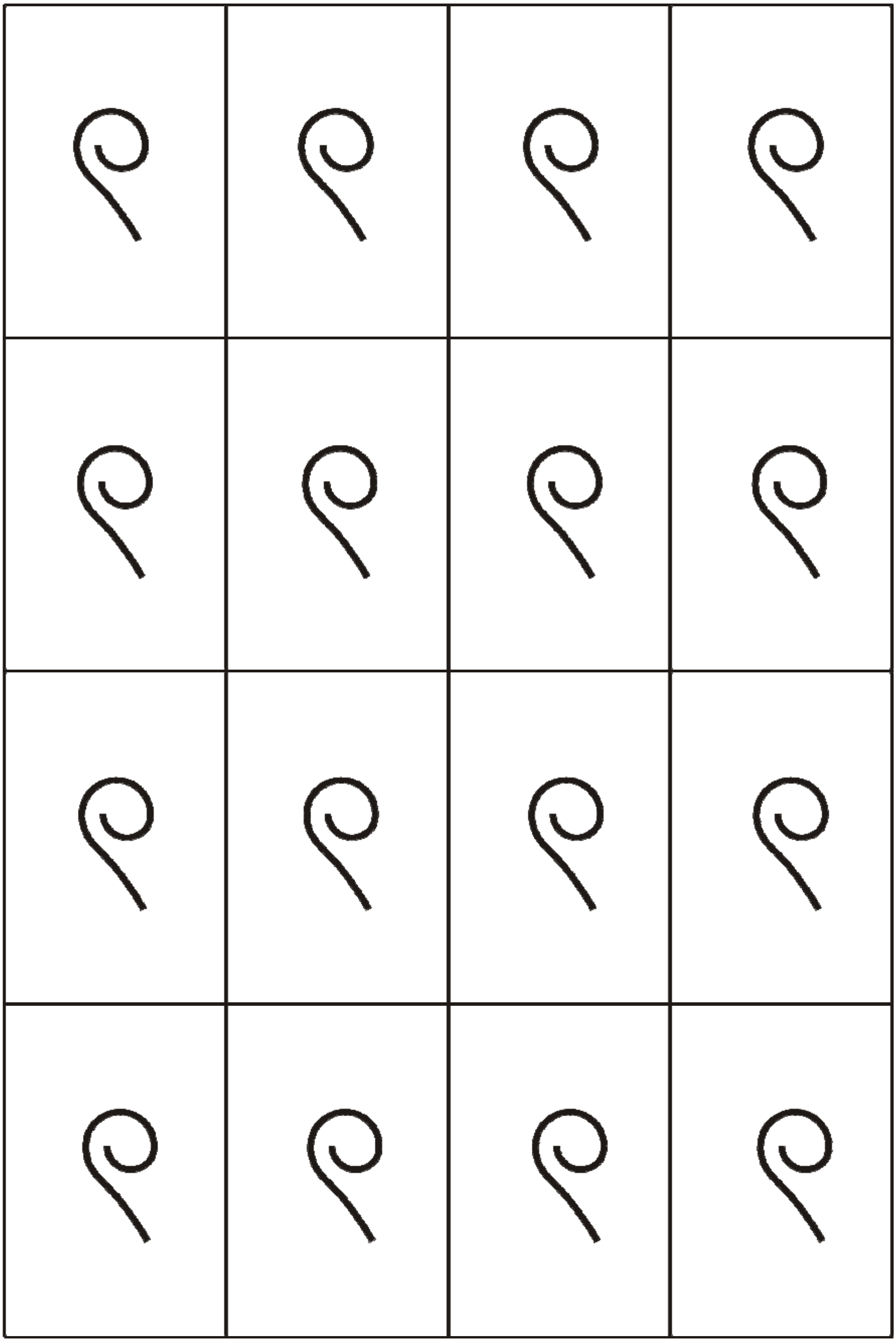
Las reglas del juego son equivalentes a las de cualquier juego de azar con dados conocido. Los órdenes de magnitud de las cifras indican la jerarquía de valores.

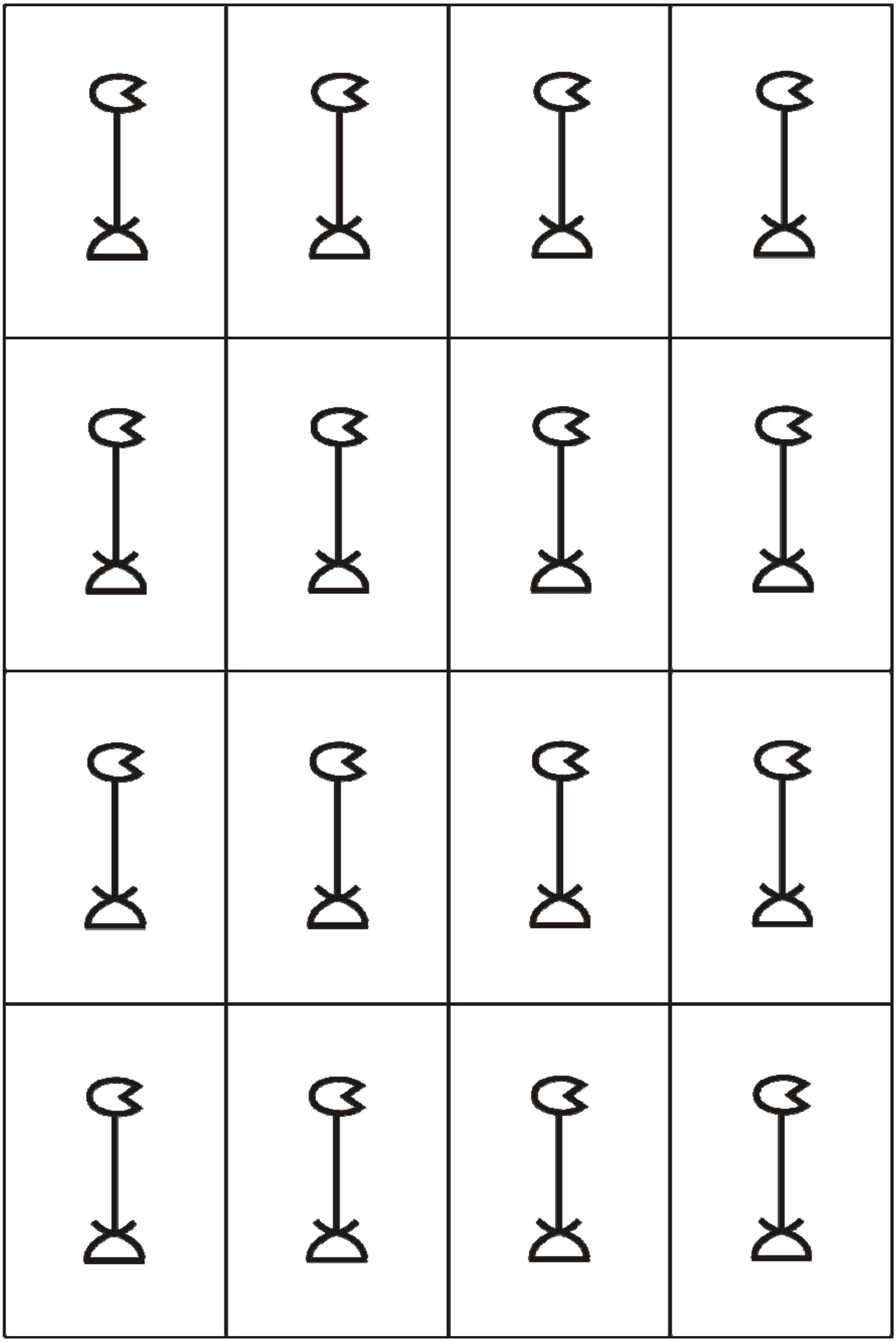
Apéndices

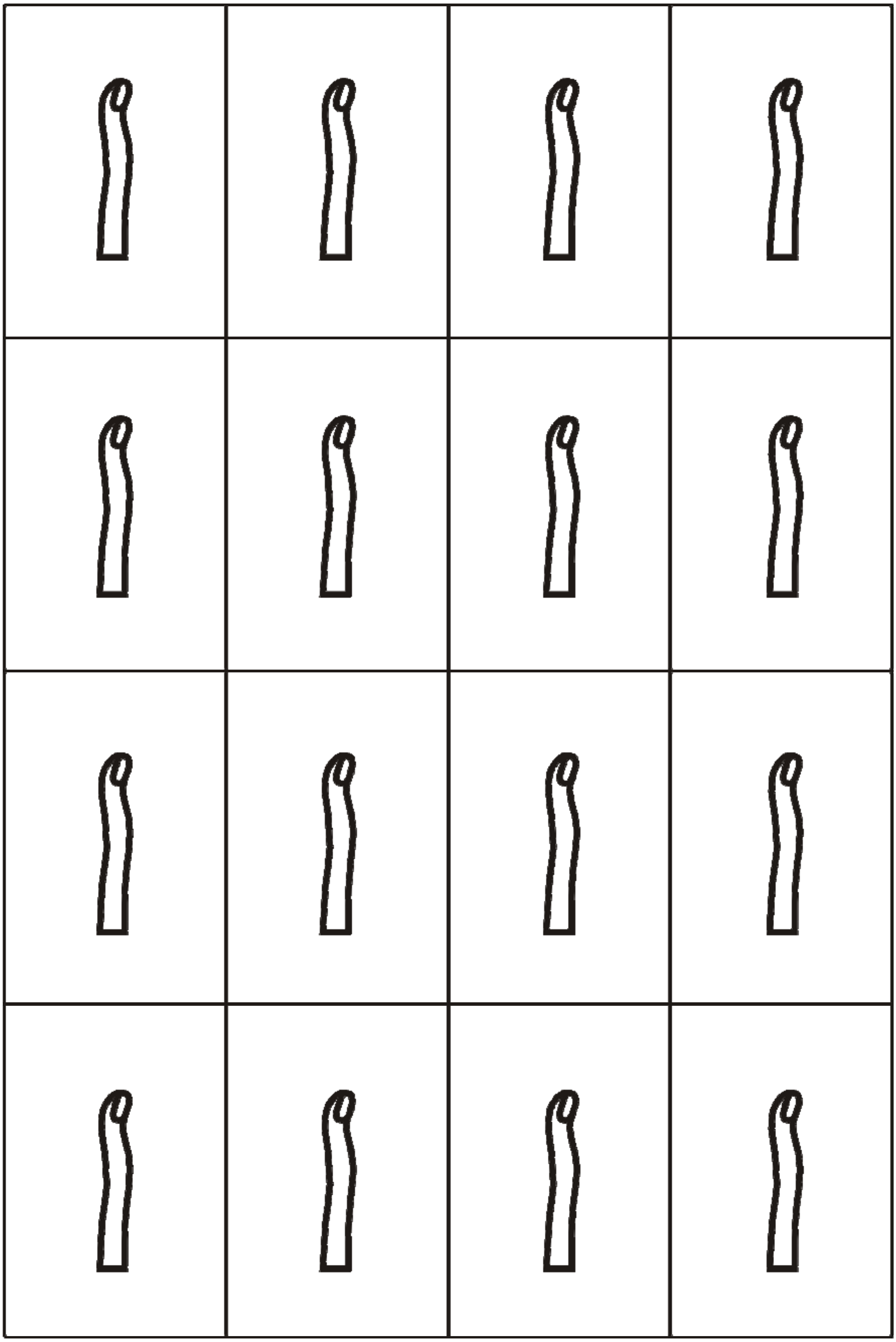
Apéndice 1: Hojas recortables con un símbolo en cada hoja

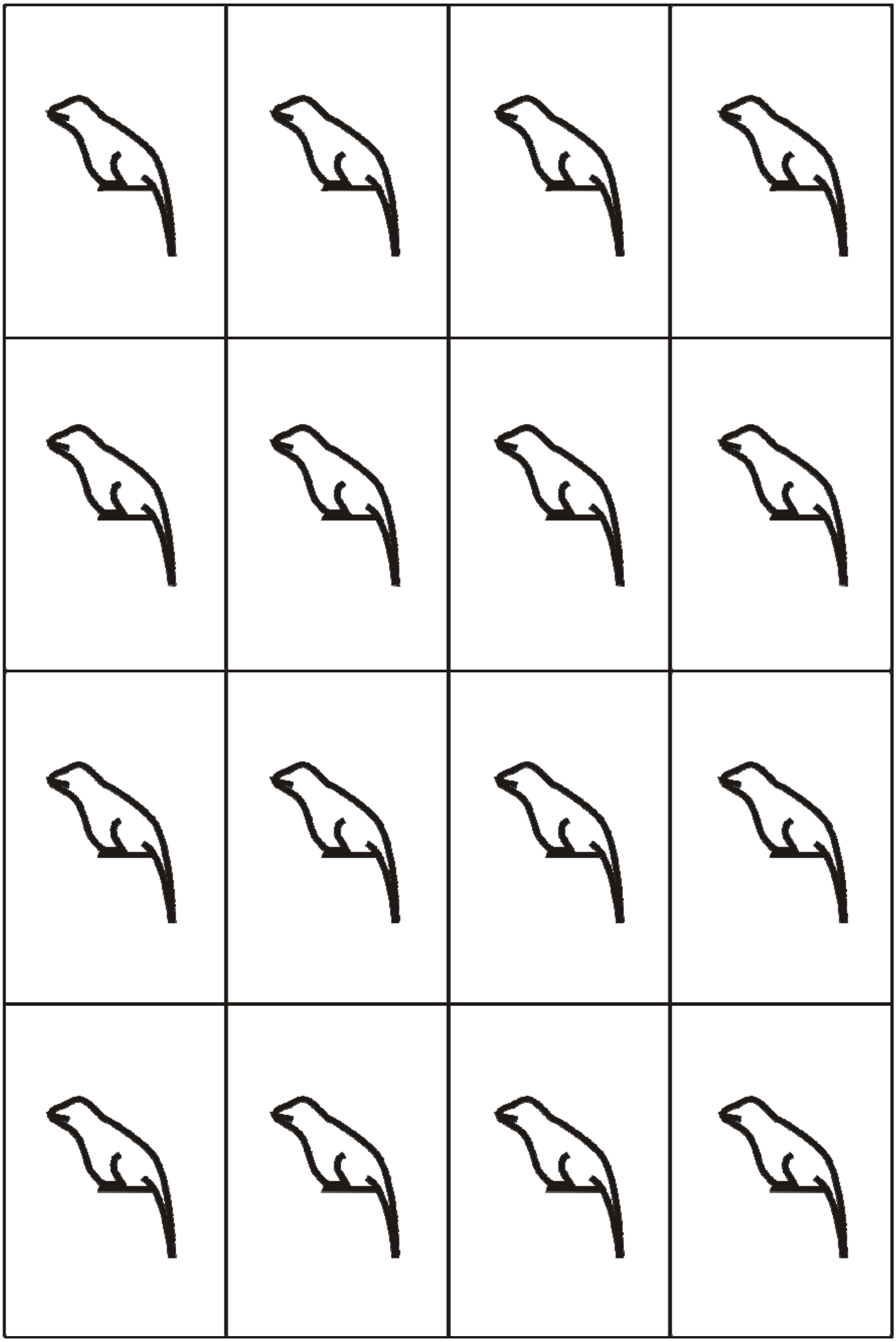


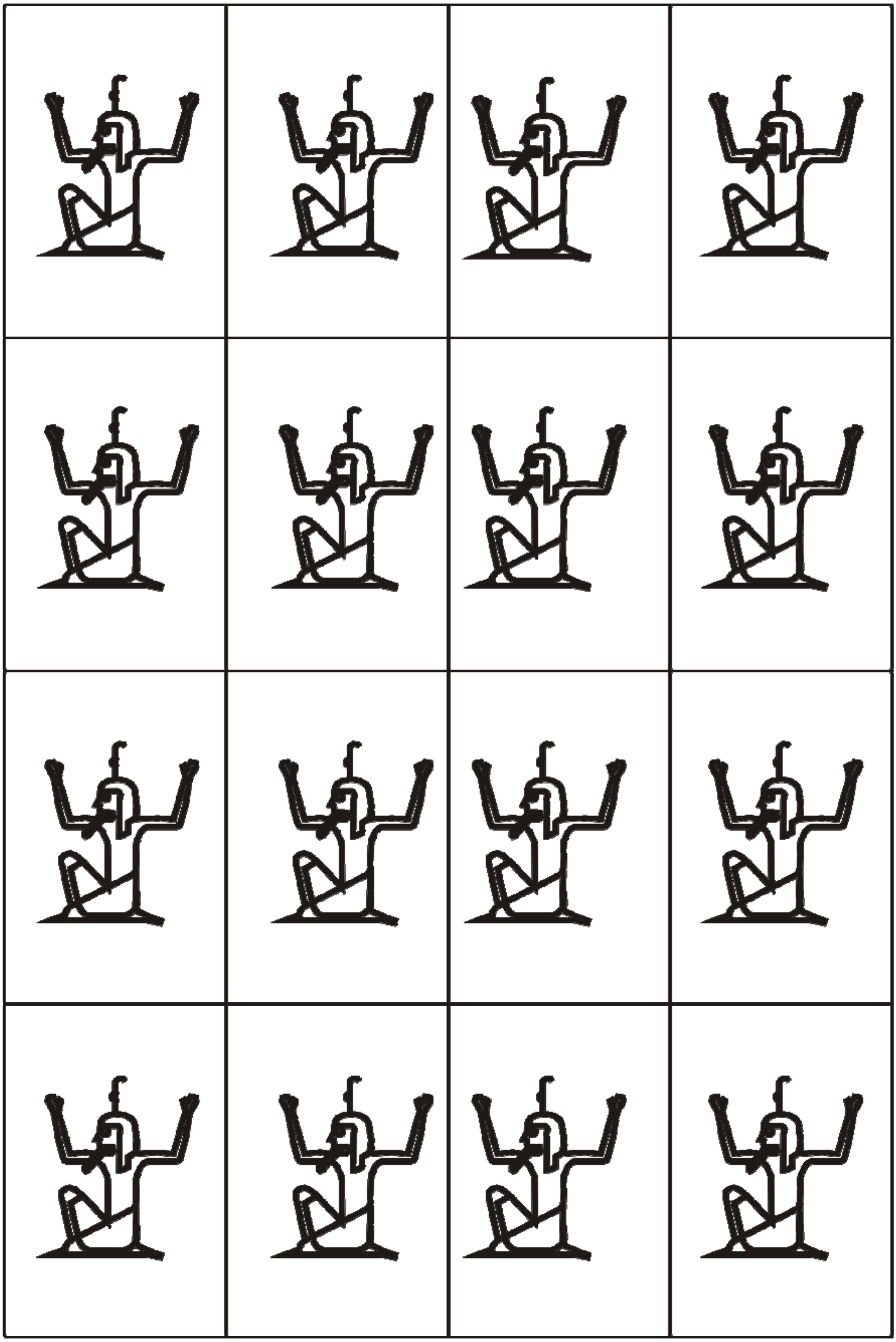


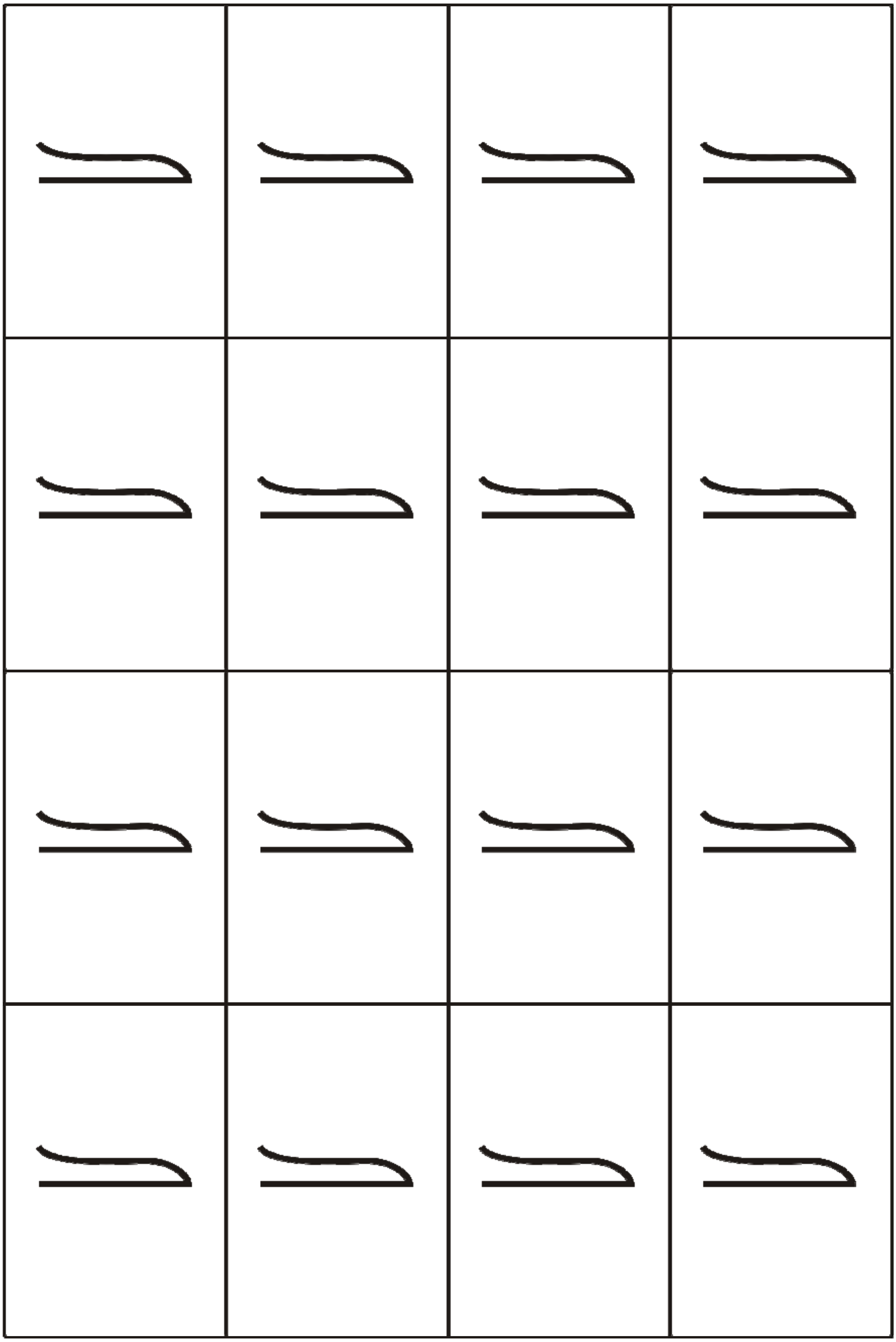


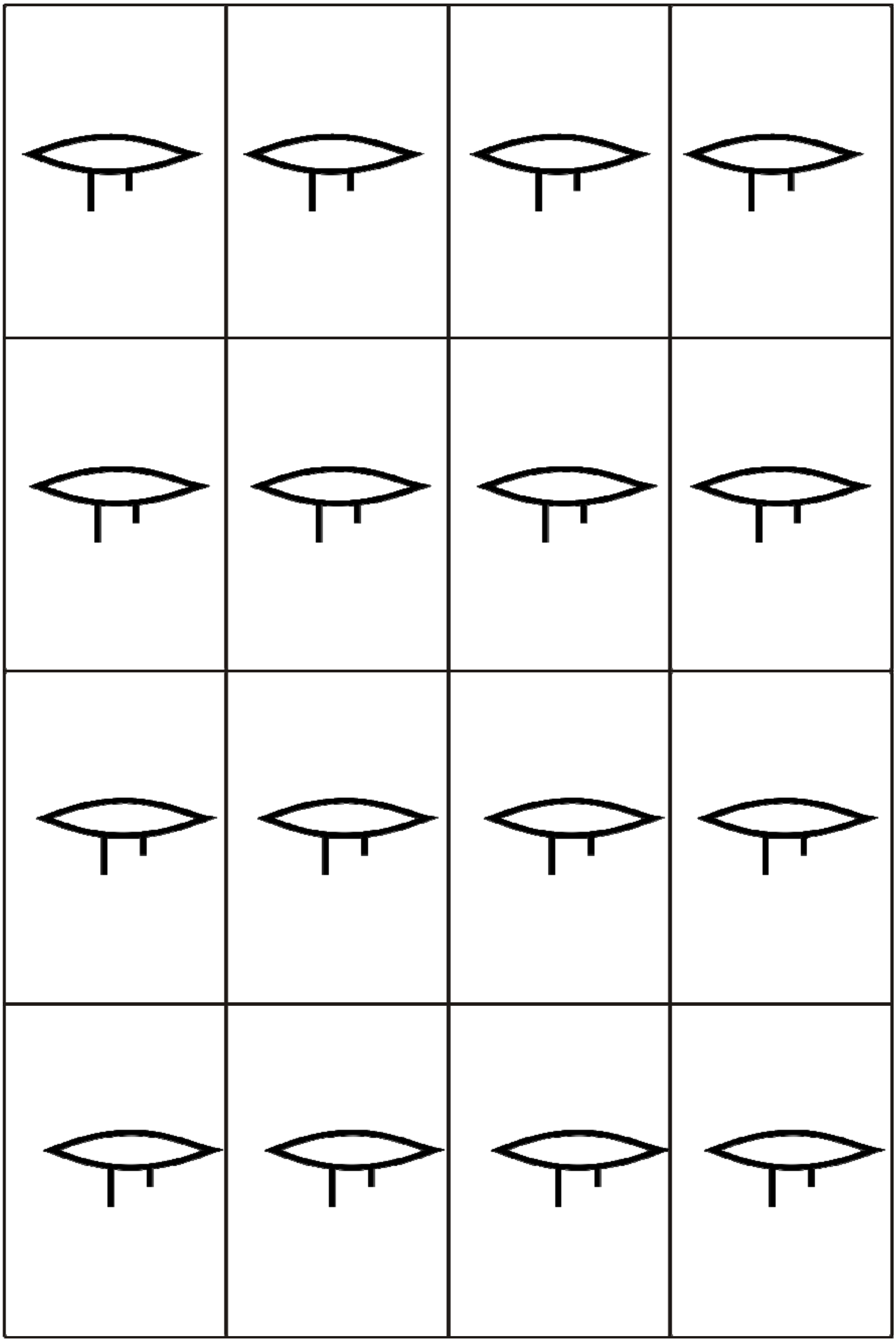


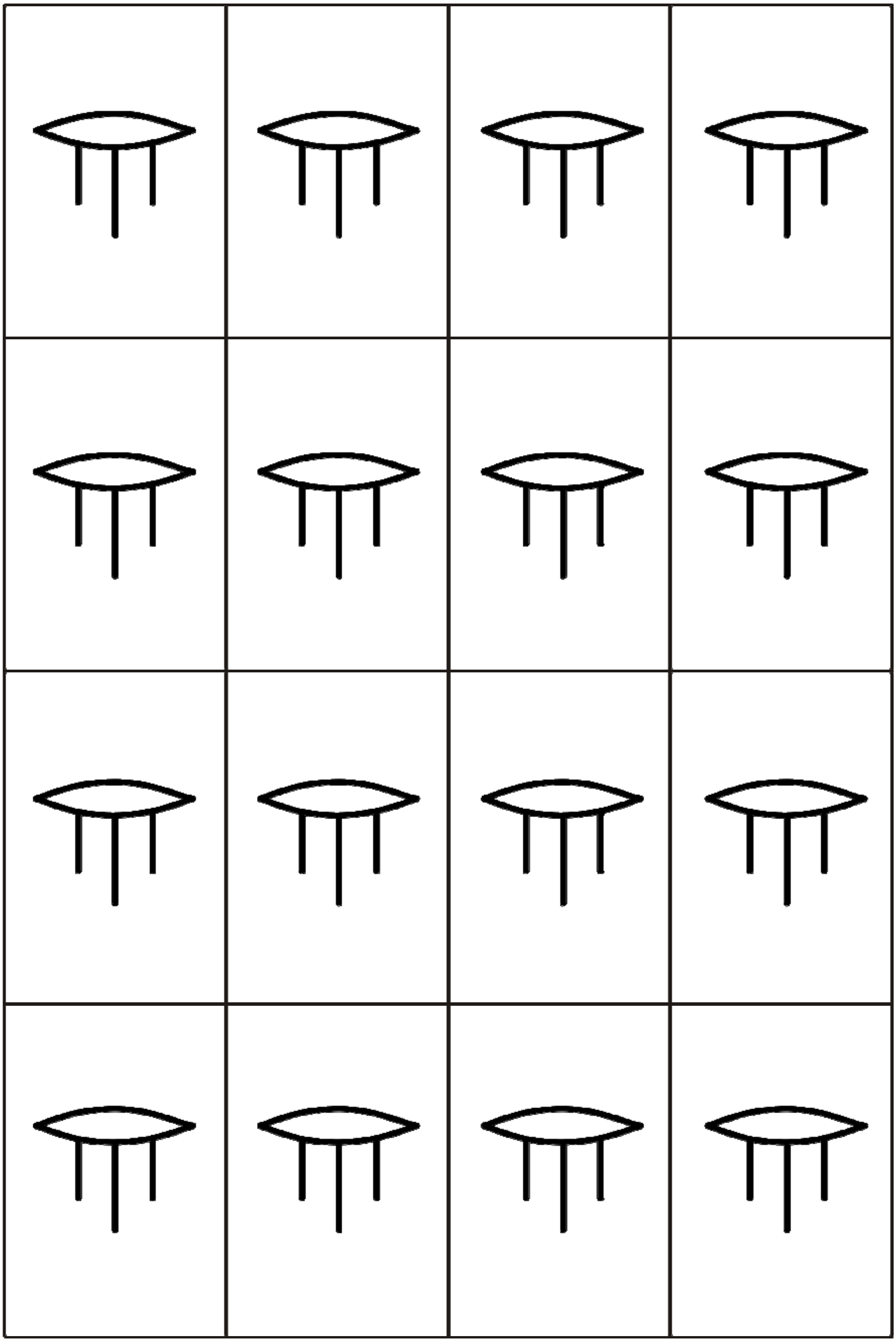


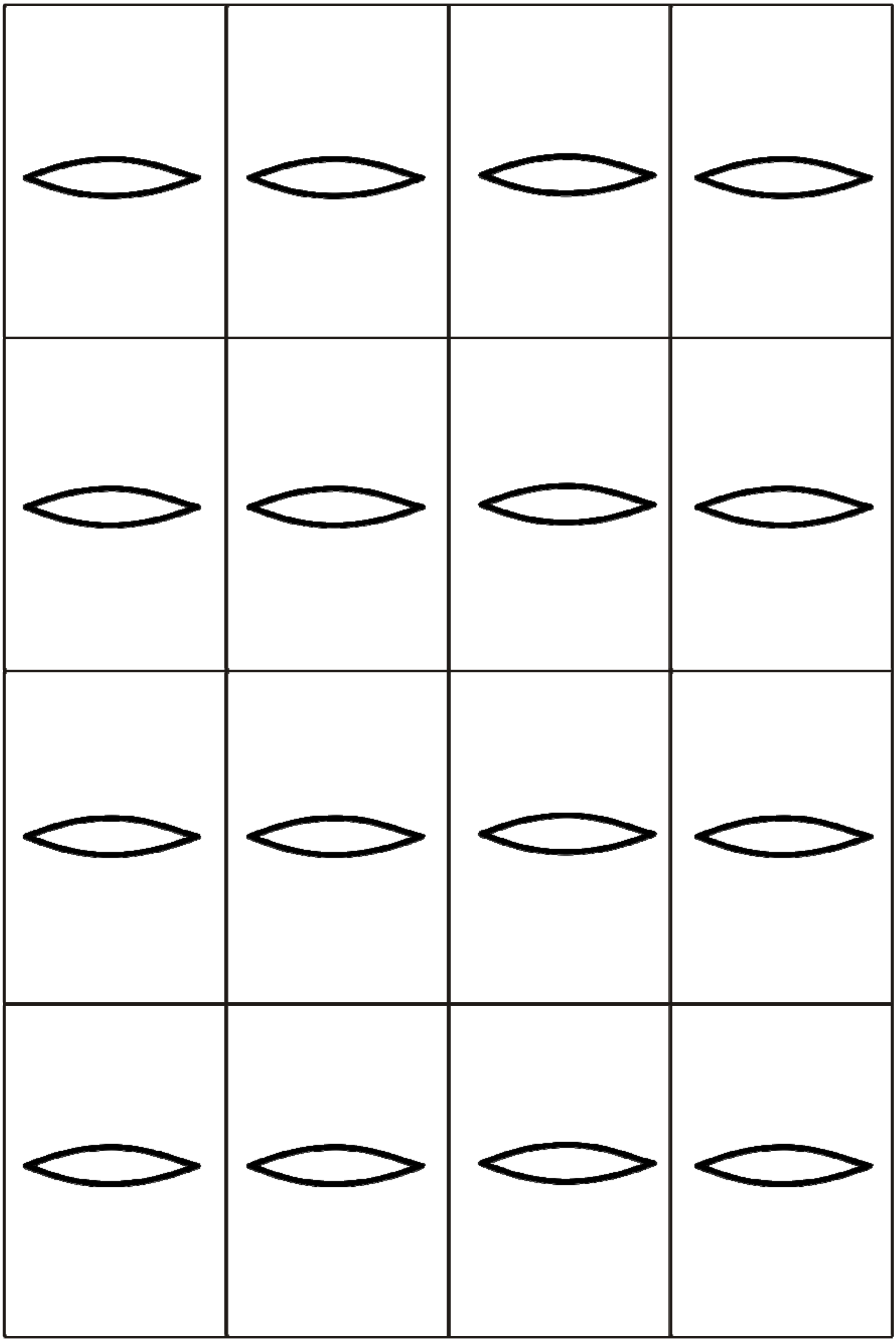






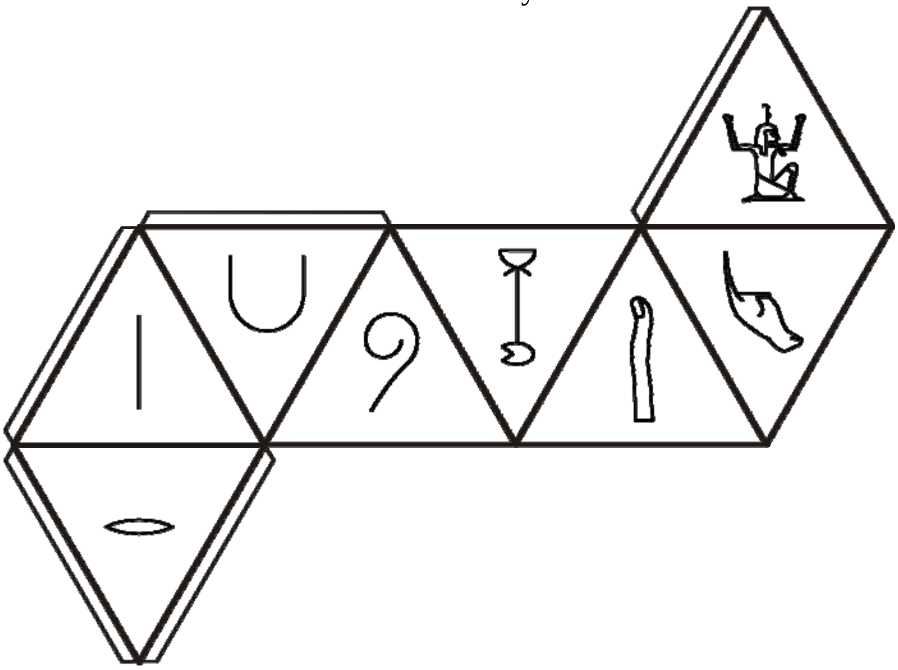




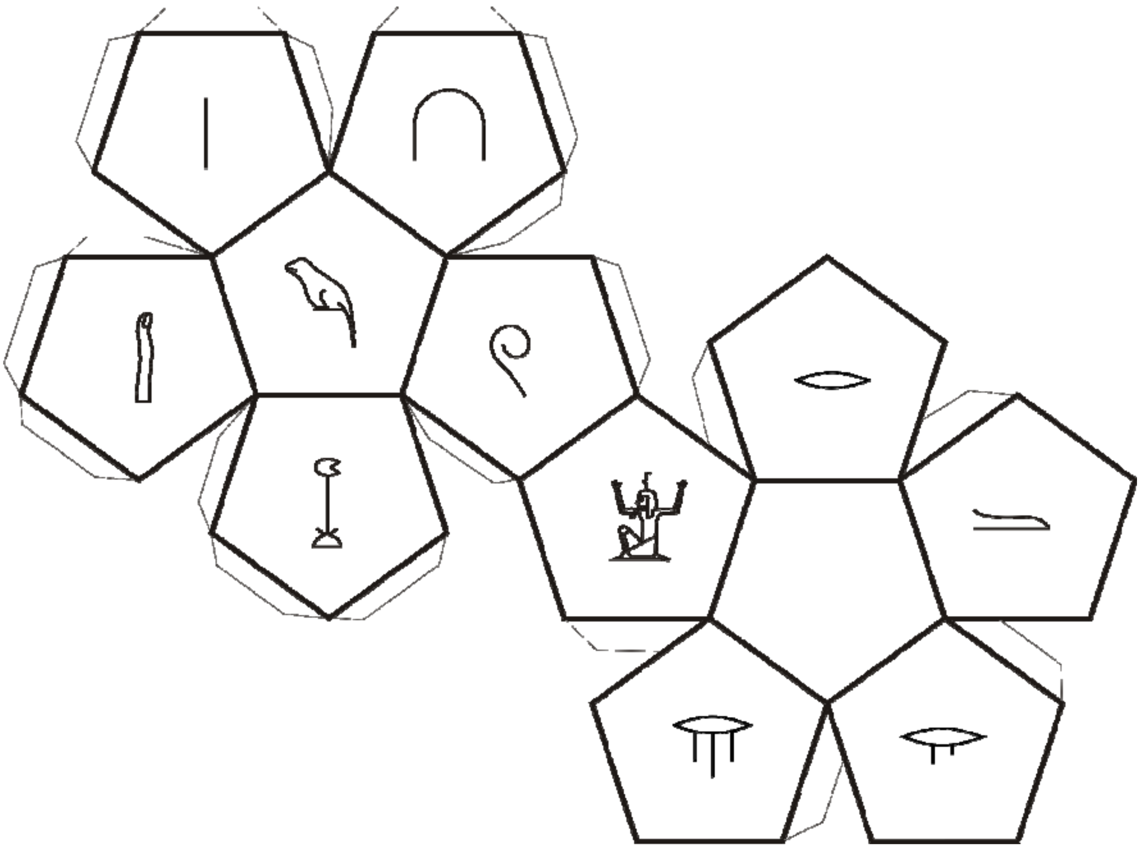


Apéndice 2: Dados con símbolos numéricos egipcios

El octaedro con un símbolo en cada caray el símbolo de la fracción:

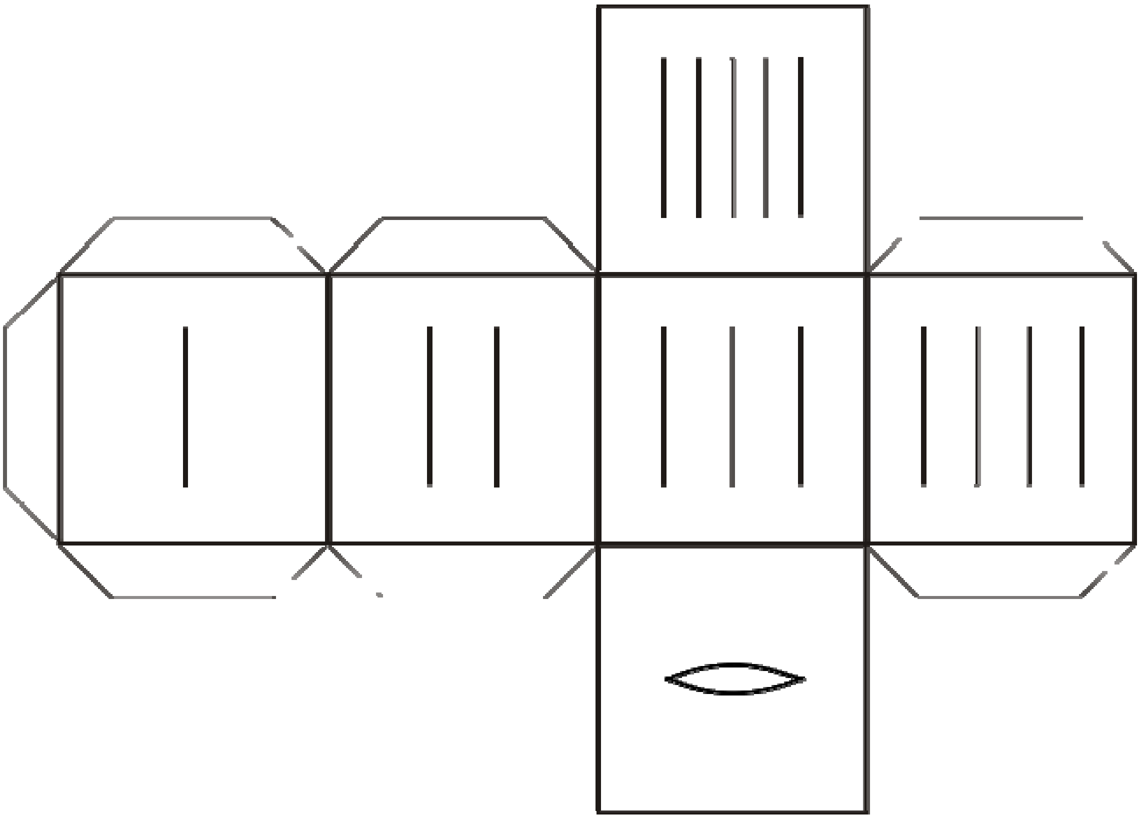


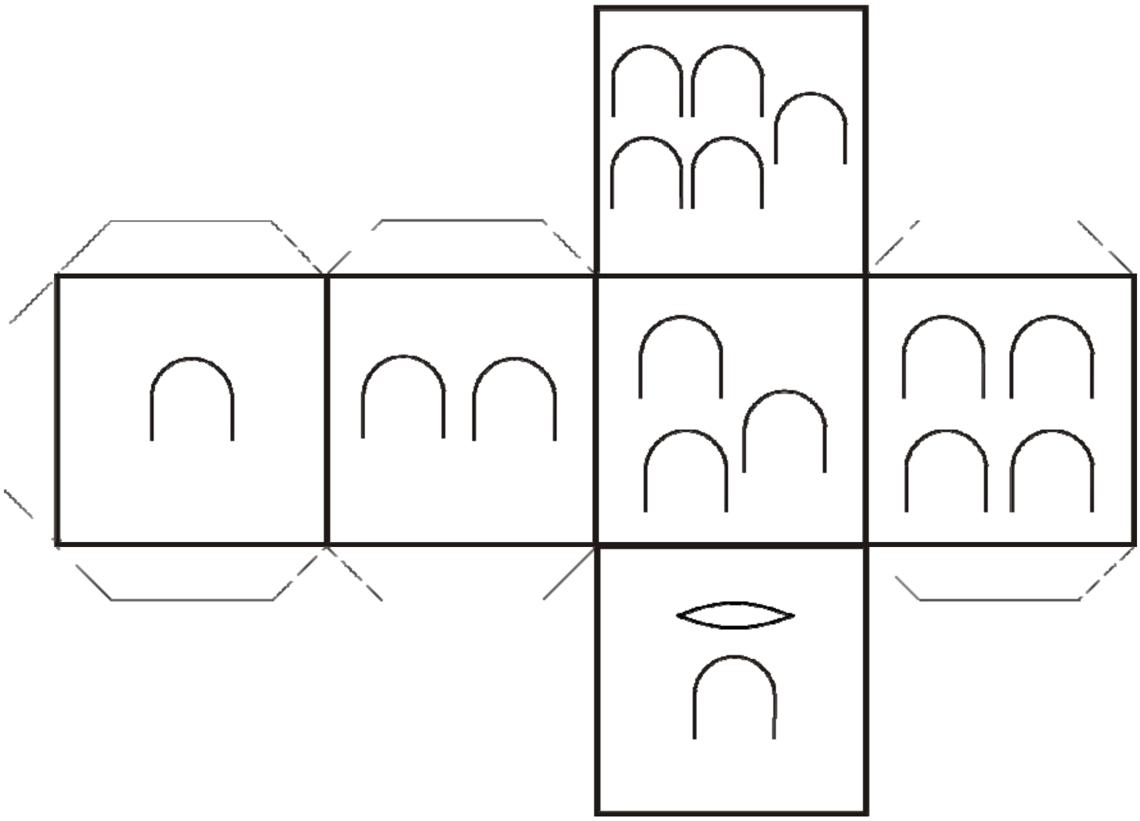
El dodecaedro con un símbolo numérico en cada cara, el símbolo de fracción y los símbolos de las principales fracciones ½, 2/3, ¾.

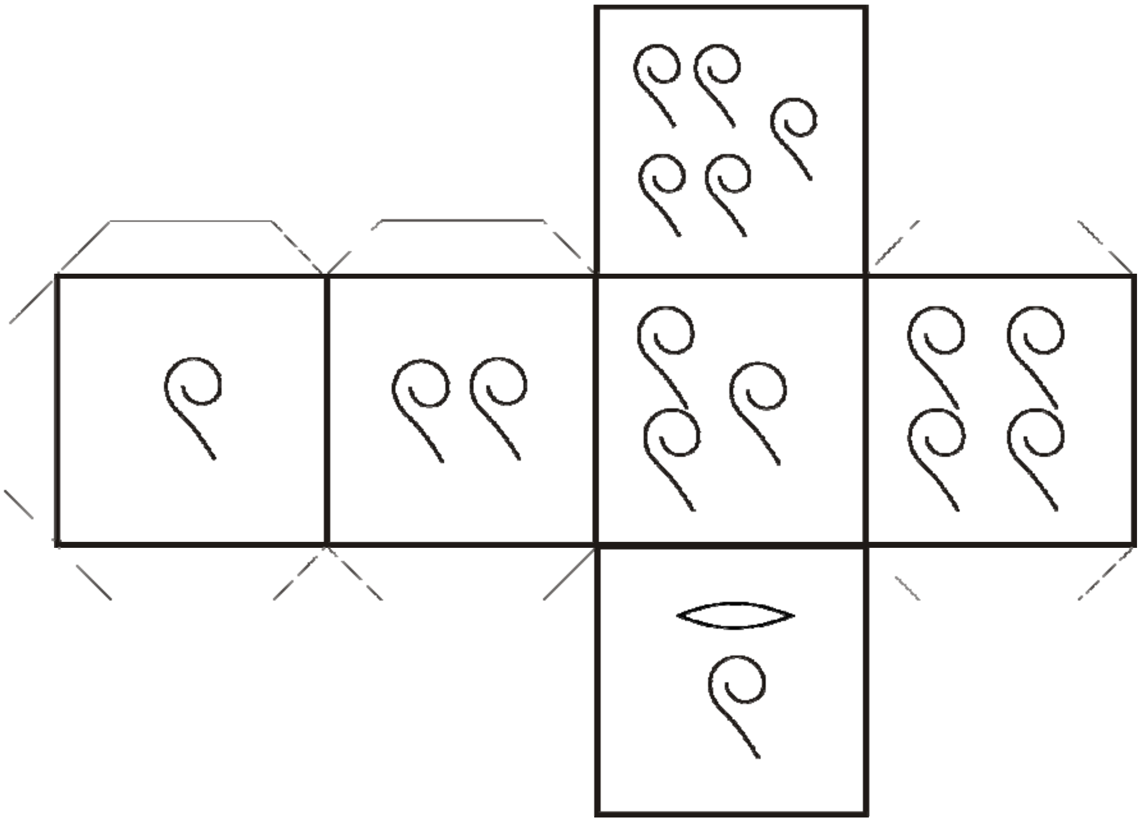


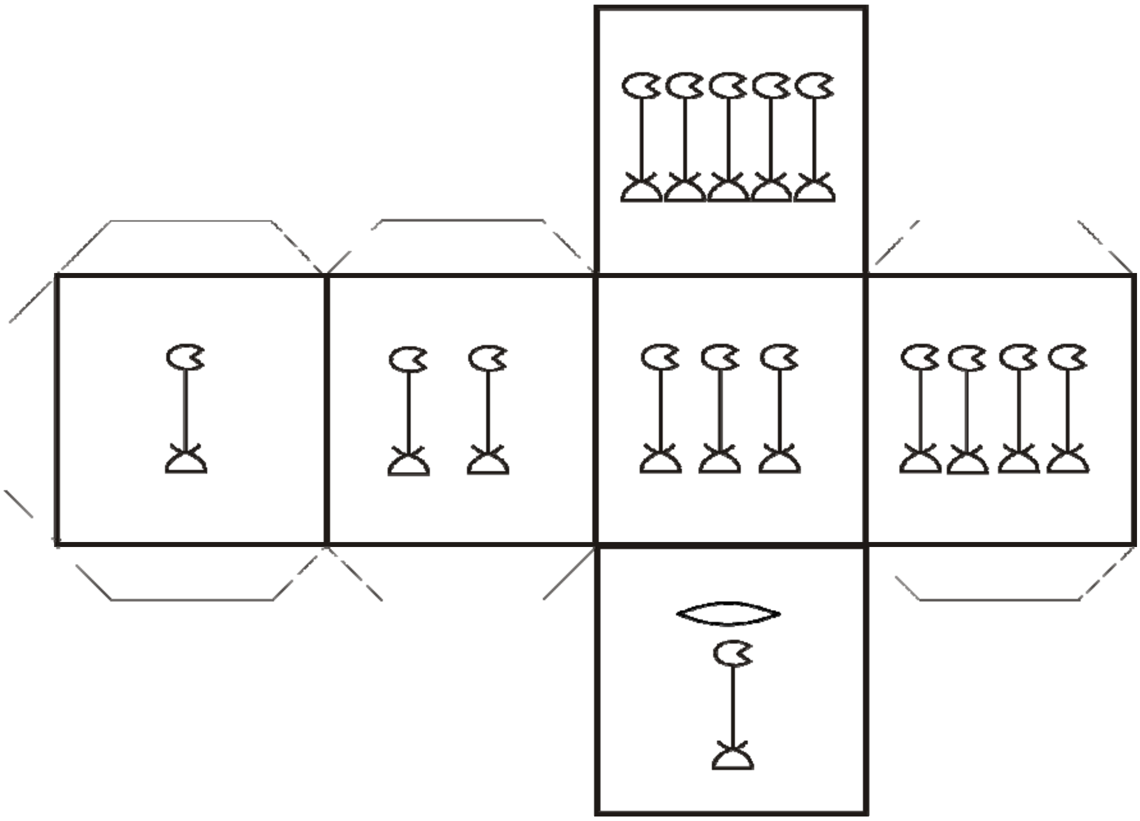
Apéndice 3

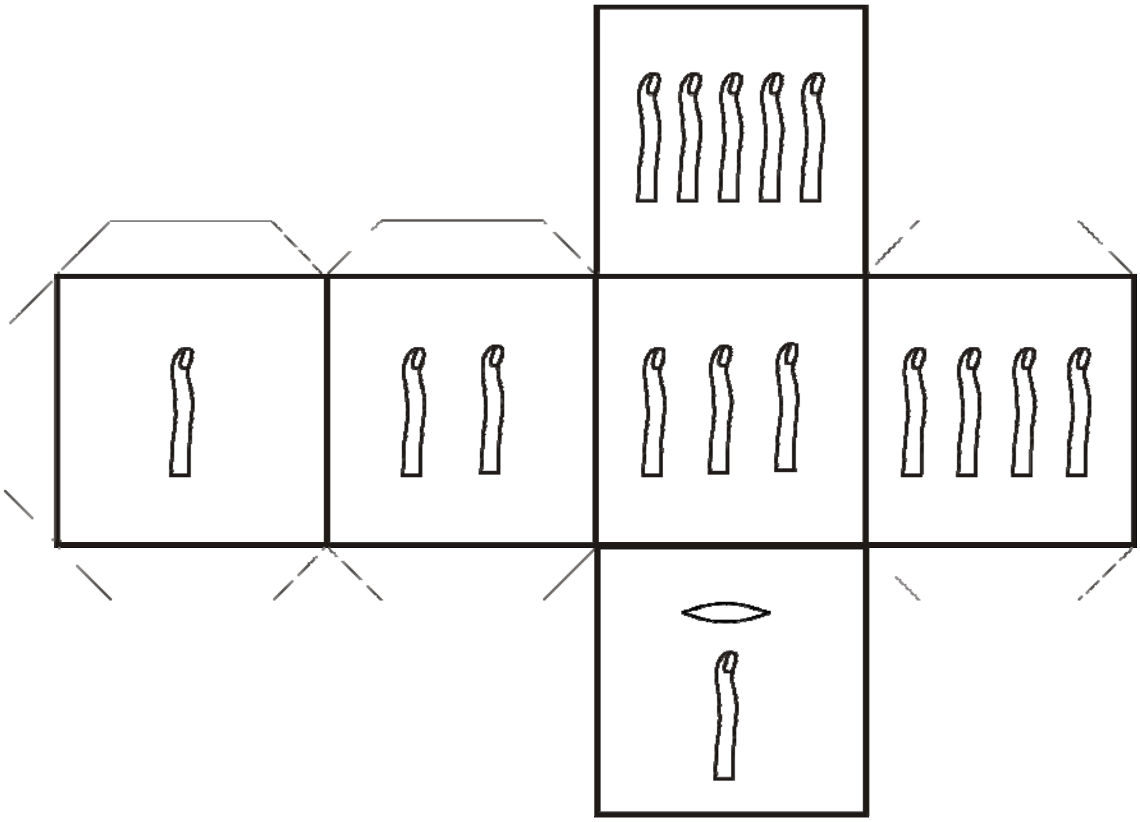
Dados con un símbolo y el de fracción. El juego completo incluye un dado para cada símbolo.

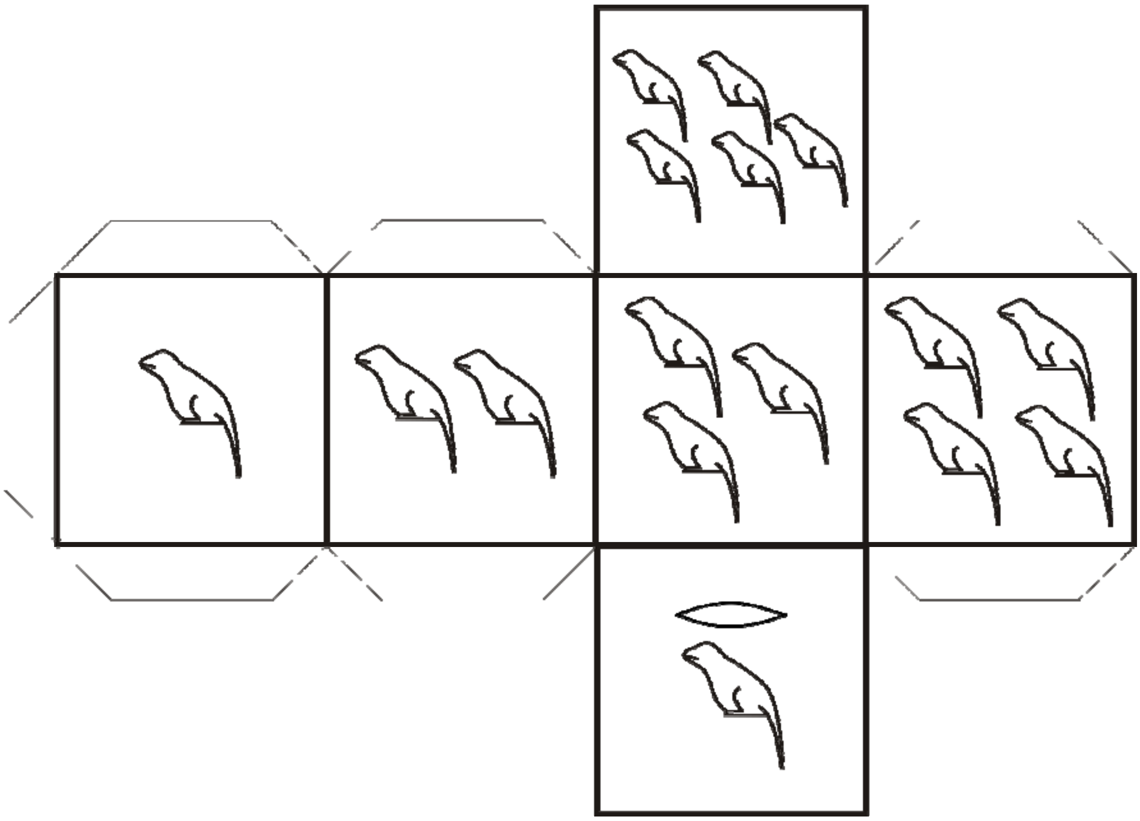


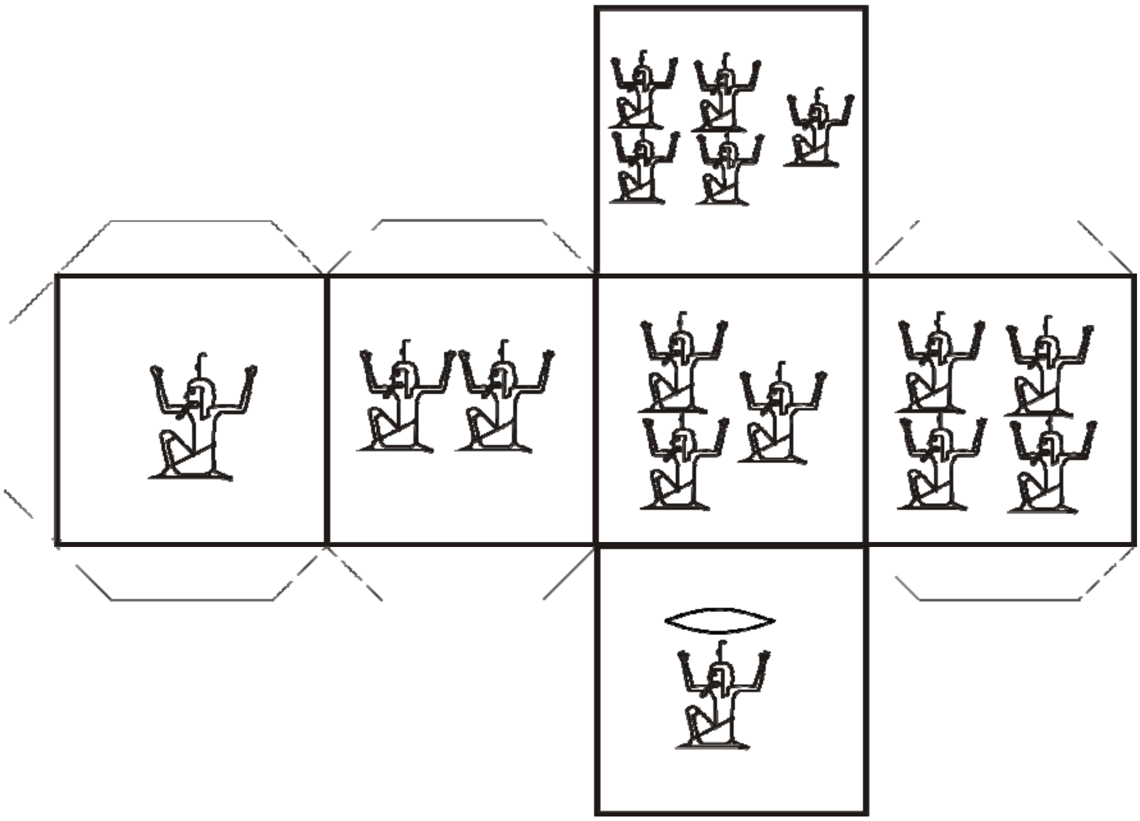


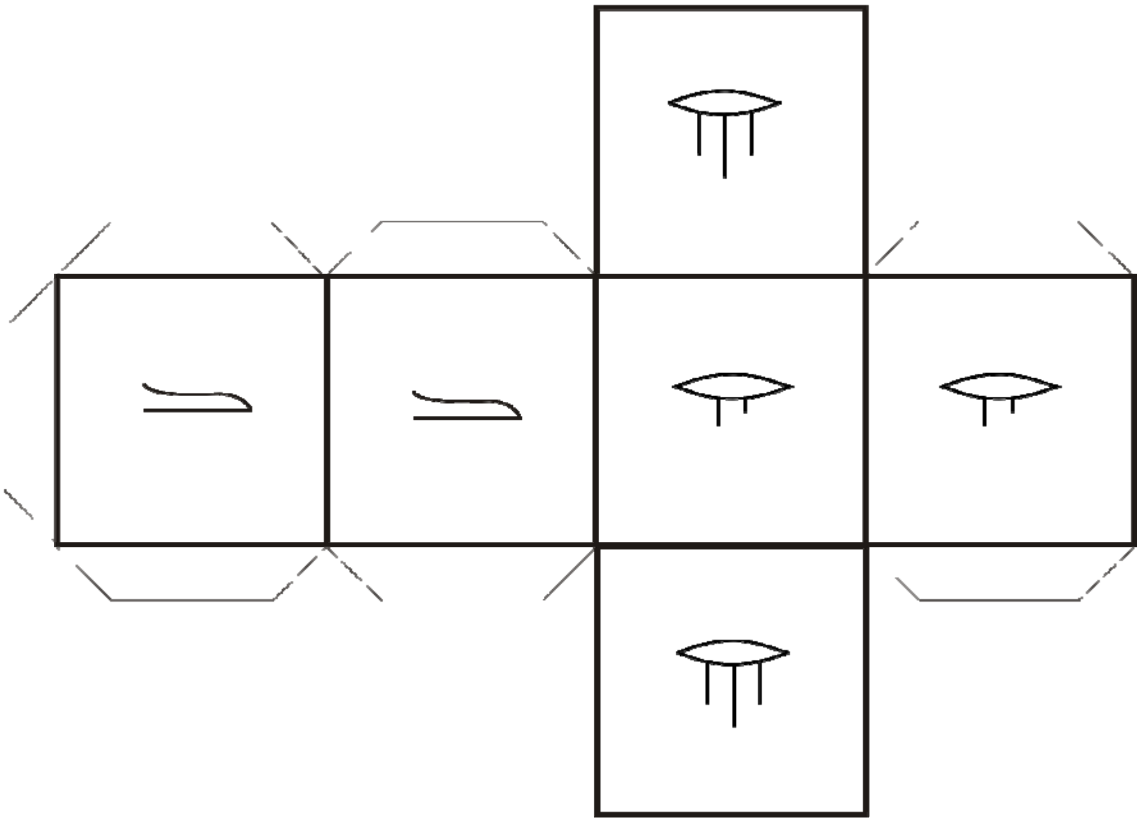












Bibliografía

BOYER, C. B. (1986): Historia de la Matemática, Alianza Editorial, Madrid.

GAIRÍN SALLÁN, J.M. (1999): Los enigmáticos cálculos del escriba Ahmes, Suma nº 31, junio 1999, pp. 55-66.

GILLINGS, R. J. (1972): Mathematics in the time of the pharaons, Dover Publications, New York.

IFRAH, G. (1998): Historia universal de las cifras, Espasa Calpe, S.A., Madrid.

NEUGEBAUER, O. (1969): The Exact sciences in antiquity, Segunda edición, Dover Publications, New York.

Las Tecnologías de la Información y la Comunicación en la Educación: Recursos para la enseñanza y el aprendizaje de las Matemáticas.

Carmen Castro

Las Tecnologías de la Información y la Comunicación son herramientas de la sociedad actual, es decir, de la Sociedad de la Información y el Conocimiento. La Sociedad de la Información se caracteriza por desarrollarse en un marco globalizado, por el vertiginoso avance científico que en ella se produce y por el uso de las potentes y versátiles tecnologías de la información y la comunicación.

Todo ello produce efectos y consecuencias en el mundo laboral y educativo.

En esta sociedad el aumento de la productividad se basa en la innovación, en la mejora del saber, en la aplicación del conocimiento y en la utilización de tecnologías cada vez más potentes. El trabajador del conocimiento cada vez más pasa a dominar el mercado laboral.

En las organizaciones el capital intelectual se convierte en un nuevo activo y la gestión del conocimiento es una de sus actividades fundamentales.

Internet es una red informática mundial, descentralizada, formada por la conexión directa entre computadoras mediante un protocolo especial de comunicación que nos proporciona información y comunicación.

En el mundo educativo la información que extraemos de Internet la podemos usar para el desempeño de nuestra profesión.

Los sitios web nos proporcionan bibliografía, nos sirven para la preparación de clases, la producción de información, la indagación e investigación; así como para la realización de actividades interactivas y periódicos digitales. Los blogs los podemos utilizar para la tutoría de alumnos, el blog de clase. (Edublog para la tutoría o el blog de clase) http://www.pangea.org/dim/revistaDIM7/revcentro1.htm

Las herramientas colaborativas permiten la creación de portales de profesores con aplicaciones específicas como los foros, chats, blogs, wikis, videoconferencias… que favorecen el trabajo en equipo.

Las líneas de acción en educación deben orientarse a la adquisición de la competencia digital para, entre otras cosas, evitar las brechas digitales. La integración de las tecnologías de la información y la comunicación de una manera eficiente en la labor docente aprovechando todo el potencial que nos ofrecen ayudarán a nuestros alumnos y alumnas a conseguir sus objetivos de aprendizaje en relación a la competencia matemática además de promover la autonomía y el espíritu emprendedor.

Podemos celebrar que existan en la red toda una serie de aplicaciones para la enseñanza y el aprendizaje de las Matemáticas. Las que se exponen en este artículo son software libre de matemáticas para educación. Están disponibles en Internet por lo que solamente requieren para su utilización de un puesto informático fijo o móvil y de acceso a Internet. Sirven tanto para estrategias de formación tipo entrenamiento (desarrollo de habilidades y destrezas) como para la construcción de conocimiento (formación de conceptos matemáticos).

Estas aplicaciones y el diseño metodológico subyacente en ellas les hace especialmente útiles en contextos educativos heterogéneos, que son los característicos de nuestro sistema educativo, sobre todo en los niveles de primaria y ESO, permitiendo que los profesores puedan crear distintas estrategias de aprendizaje para dar respuesta a la diversidad de conocimientos previos, capacidades, ritmos de aprendizaje, intereses… Es decir la atención a la diversidad se ve facilitada con el uso de las TICs.

Presentaciones digitales.

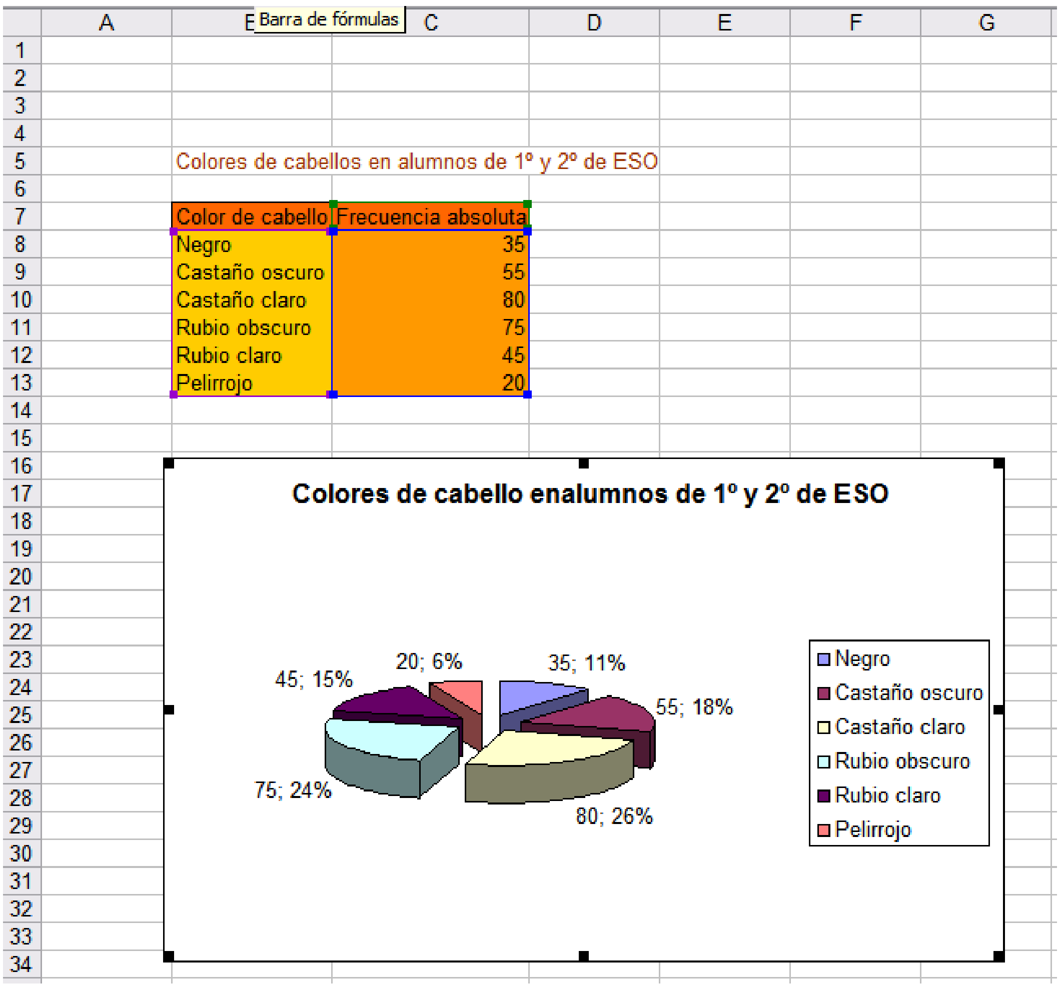
Las presentaciones digitales son un conjunto de diapositivas que muestran información en forma de texto, de gráficos, de imágenes, de sonidos. En el aula, utilizándolas conjuntamente con la pizarra digital apoyan las explicaciones del profesor a la vez que prestan un buen soporte para la presentación de los trabajos por parte de los alumnos.

OpenOffice.org es una suite ofimática de software libre y código abierto de distribución gratuita, altamente compatible con Microsoft Office y que soporta un gran número de idiomas.

A esta suite pertenece Impress que es el equivalente a Microsoft Power Point.

Hojas de Cálculo: OpenCal y Excel.

Las hojas de cálculo pueden ser herramientas muy versátiles en manos de un profesor de matemáticas. OpenOffice.org incluye dentro del paquete ofimático una hoja de cálculo “OpenCal” equivalente a Excel. Las posibilidades de realizar operaciones de cálculo numérico de una manera sencilla y transformar en gráficos los datos hacen especialmente recomendable el uso de estas herramientas para aspectos relacionados con la estadística descriptiva.



WIRIS.

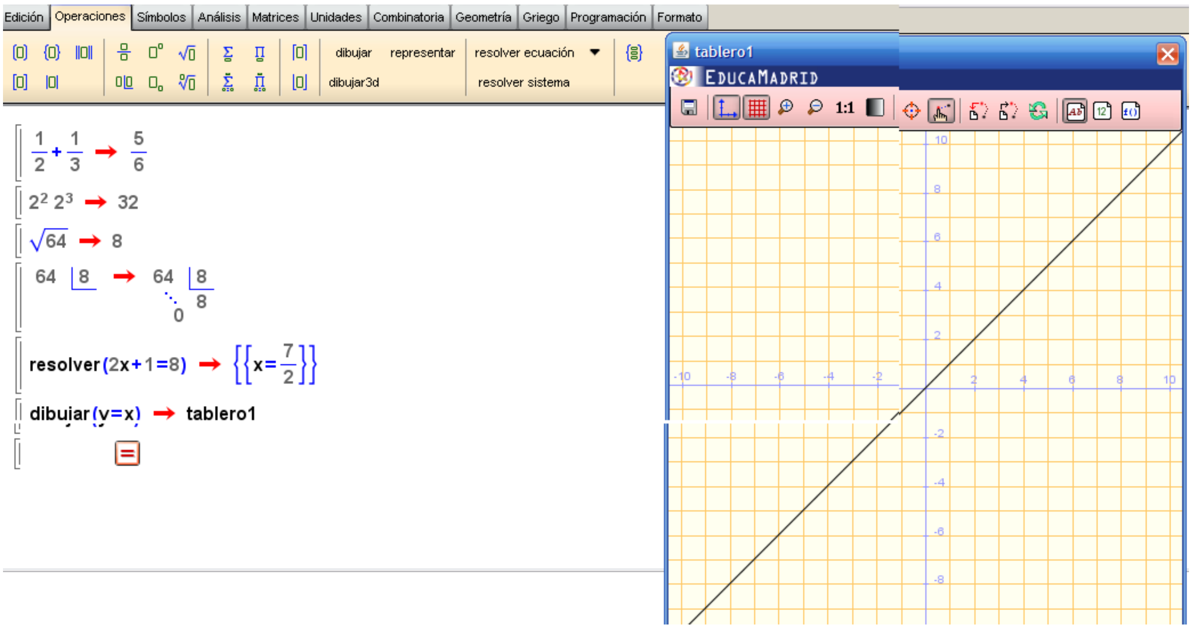
Calculadora on line. Tiene la ventaja de que no hace falta instalarla y la desventaja de que para utilizarla se debe tener conexión a Internet.

Wiris es un programa de álgebra computacional o sistema de álgebra computacional CAS (computer algebra system), es decir, un programa de ordenador o calculadora avanzada que facilita el cálculo simbólico. La principal diferencia con las calculadoras tradicionales es la capacidad para trabajar con ecuaciones y fórmulas simbólicamente en lugar de numéricamente: a+b es interpretada siempre como suma de 2 variables y no como suma de dos números.

Wiris se dedica a cálculos matemáticos y al diseño de fórmulas.

Wiris ofrece servicios a comunidades educativas de España, Estonia, Luxemburgo, Holanda, Finlandia y América latina en sus respectivos idiomas.

El acceso a wiris es gratuito y se realiza a través de portales educativos gubernamentales.

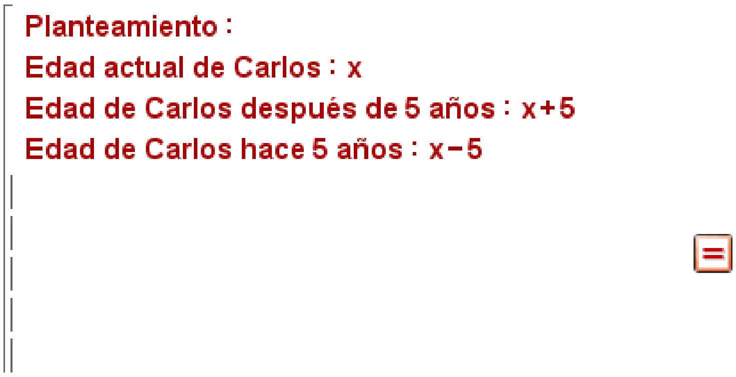


Como se muestra en la pantalla se pueden realizar entre otras múltiples cosas, operaciones, resolver ecuaciones y sistemas y representar gráficamente. El entorno es muy intuitivo y el alumnado solamente necesita algunas orientaciones de su profesor de matemáticas para comenzar a operar con ella, por lo que pueden utilizarla para corregirse los ejercicios lo que estaría potenciando la autonomía del alumno. Otra cuestión bien distinta es la resolución de problemas.

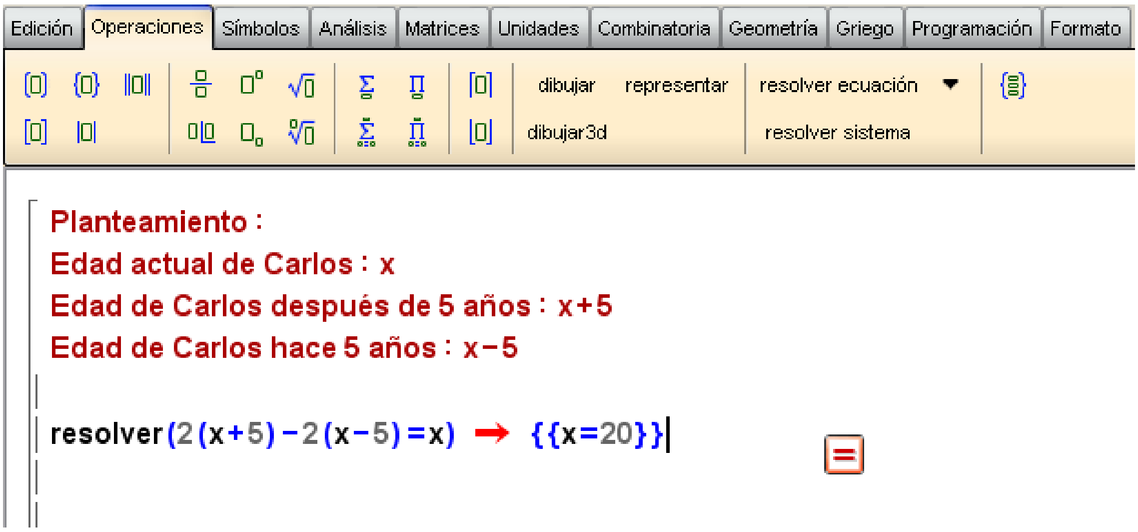
Resolución de problemas con Wiris.

Problema 1.- Javier le preguntó a su amigo Carlos cuántos años tenía y éste le contestó: "Si al doble de los años que tendré dentro de cinco años le restas el doble de los años que tenía hace 5 años, tendrás los años que tengo ahora. ¿Cuántos años tiene Carlos?

Vamos a exponer el planteamiento del problema que es solo texto. El texto lo introducimos de la siguiente manera Edición/ Abc.

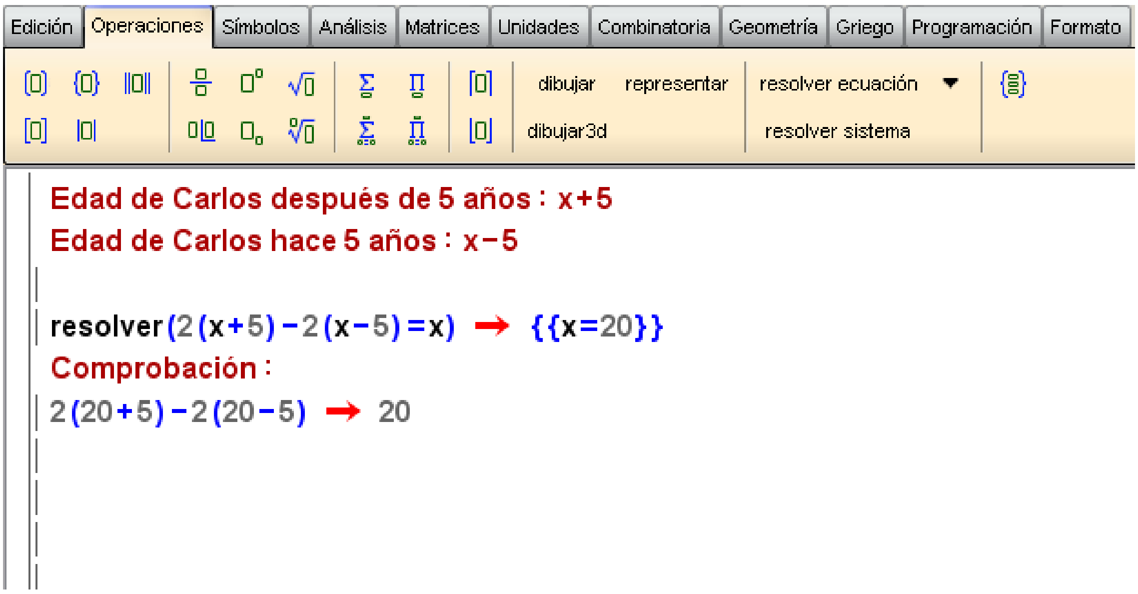


Posteriormente planteamos la ecuación y la resolvemos:
Operaciones / resolver ecuación.
Escribimos la ecuación
Pulsar en el signo "="que significa calcular.

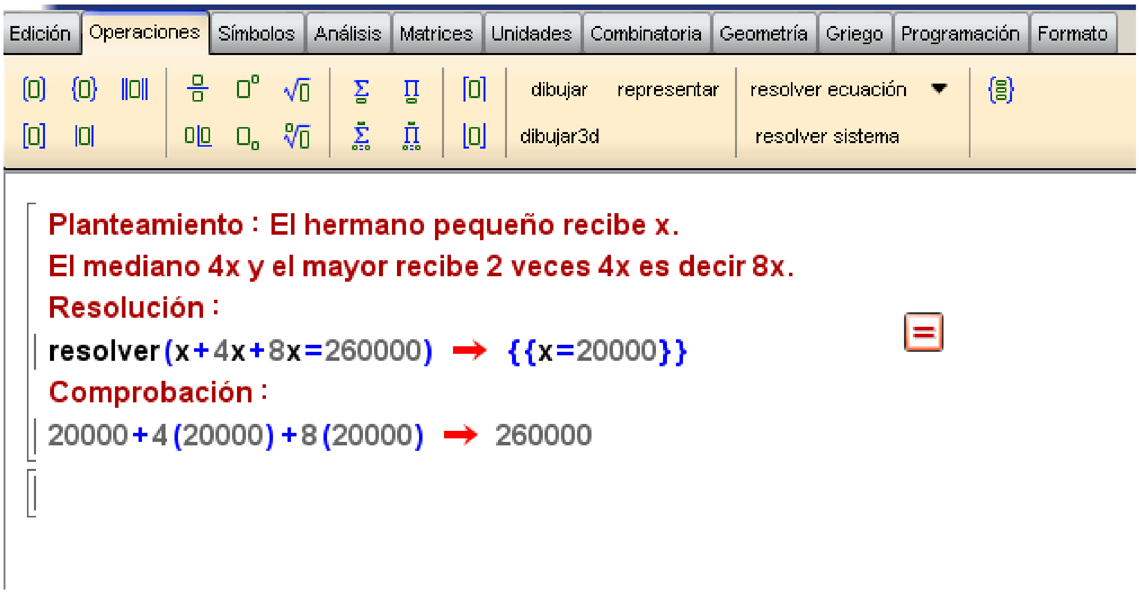


Como se aprecia en la imagen Wiris ha calculado el valor de x es decir la edad de Carlos.

Utilizando también Wiris comprobamos que el resultado es correcto.



Problema 2.- Tres hermanos se reparten 260 000 €. El mayor recibe el doble que el mediano y este el cuádruplo que el pequeño. ¿Cuánto recibe cada uno?

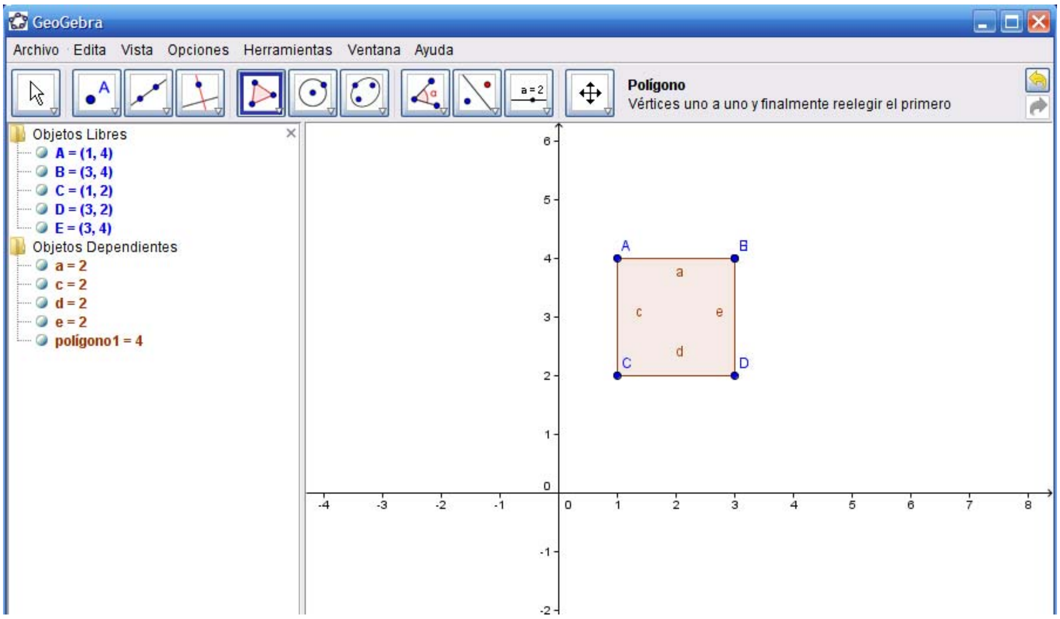


GEOGEBRA

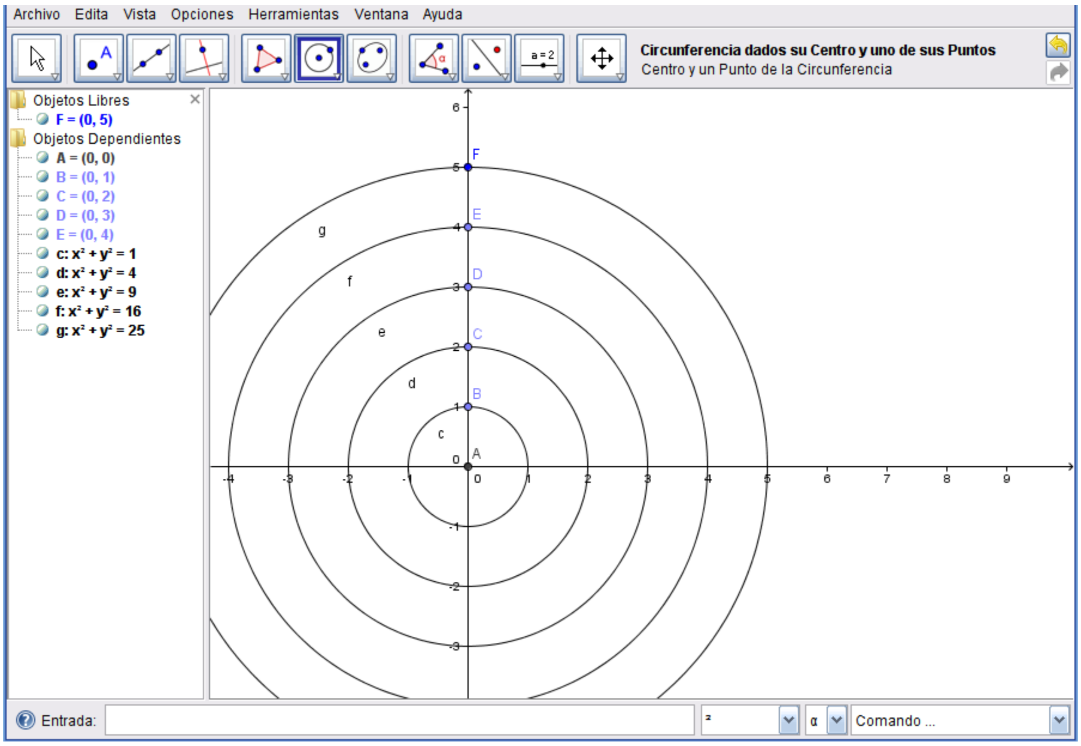
Geogebra es software libre de matemáticas para educación. Markus Hohenwarter es el creador y lider del proyecto ya que Geogebra es un desarrollo en equipo. El proyecto nace en 2001 en la Universidad de Salzburgo y se continúa en la Universidad de Atlantic en Florida.

Está escrito en Java siendo por tanto un software multiplataforma, es decir, existen versiones para Windows, Linux y Mac. Reúne aritmética, geometría, álgebra y cálculo. Se pueden ingresar ecuaciones y coordenadas directamente a la vez que permite realizar construcciones tanto con puntos, vectores, segmentos, rectas, secciones cónicas como con funciones que se pueden modificar a posteriori. Todo ello hace que el usuario pueda interactuar dinámicamente con la matemática.

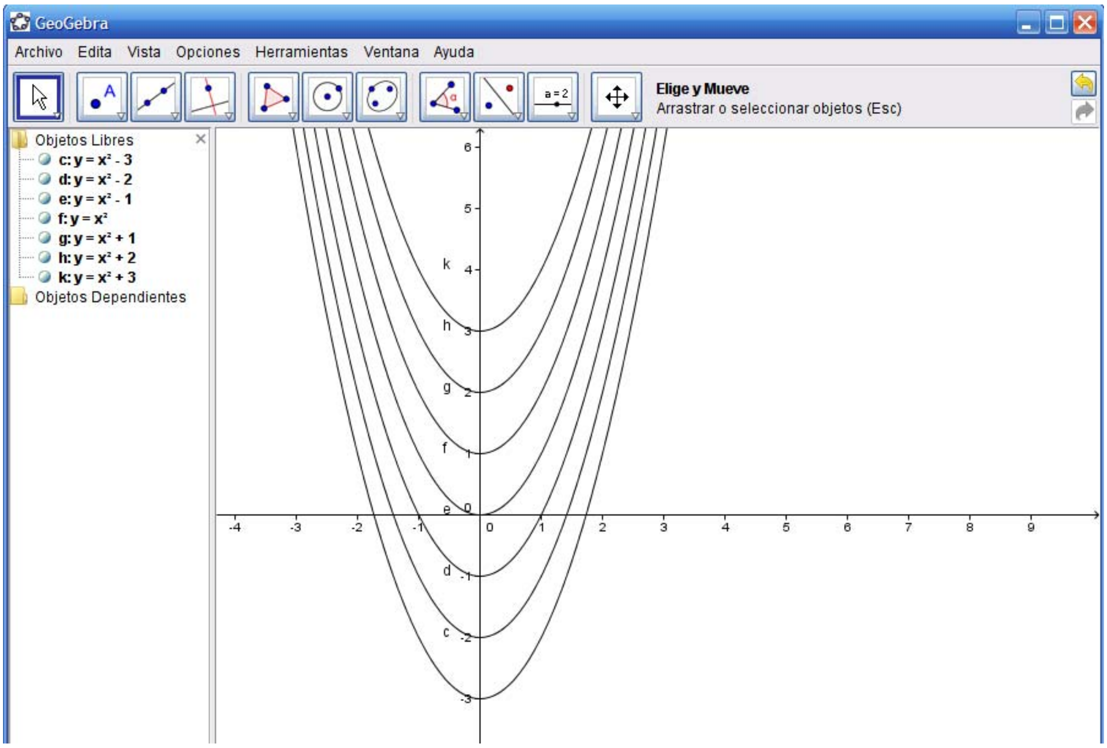
Actividad 1.- Dibujar un cuadrado. Se marcan los puntos uno a uno.



Actividad 2.- Dibujar circunferencias concéntricas de radios 1, 2, 3, 4 y 5. Se realiza marcando primero el centro y luego un punto de la circunferencia.

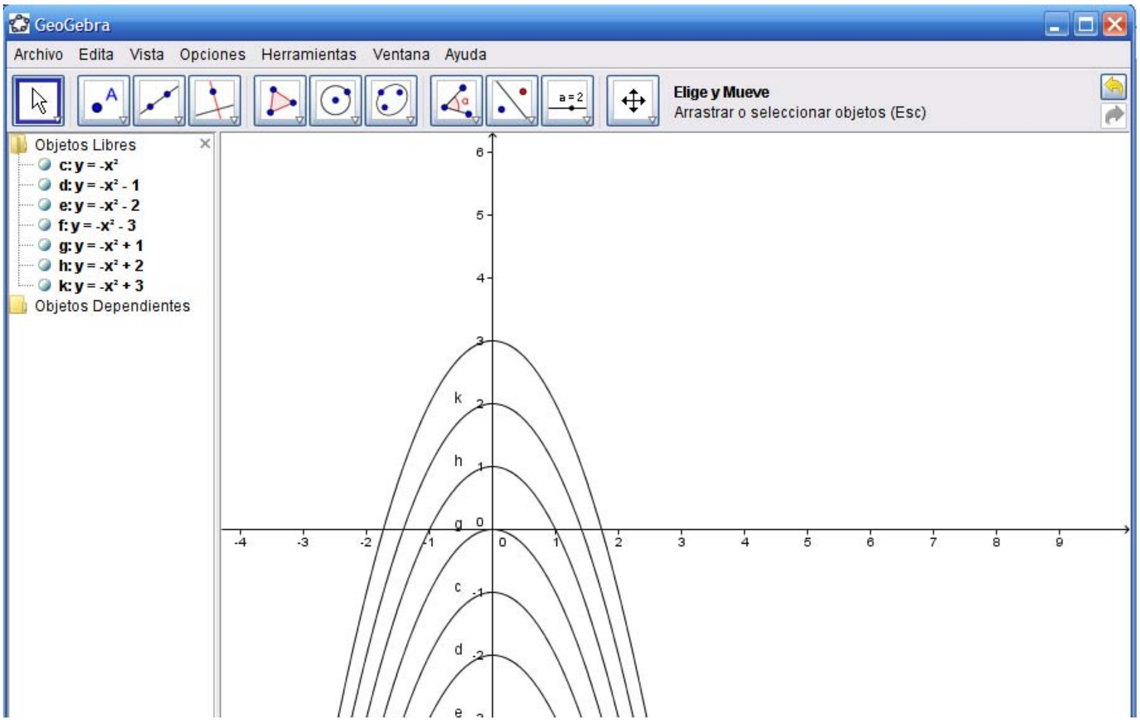


Actividad 3.- Dibujar las parábolas que corten al eje y en los puntos -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3.



Se realiza introduciendo en Entrada las siguientes expresiones:

y=x^2-3
y=x^2-2
y=x^2-1
y=x^2
y=x^2+1
y=x^2+2
y=x^2+3



La imagen anterior se consigue introduciendo en Entrada las siguientes expresiones:

y=-x^2-3
y=-x^2-2
y=-x^2-1
y=-x^2
y=-x^2+1
y=-x^2+2
y=-x^2+3

GRAPHMÁTICA.

Programa para realizar gráficos creado por Keith Hertzer, graduado por la Universidad de Berkeley, California en Ingenieria Eléctrica y Ciencias de la Computación.

Graphmática funciona en todos los sistemas de 32 bit de Windows: 95, 98, Me, Nt, 2000, XP, Vista. Soporta nombres largos, posee una barra de herramientas de gráficos estándar y ayuda html.

Graphmática representa funciones, ecuaciones e inecuaciones.

Puede utilizar papeles de graficador normal y papeles apropiados para gráficos trigonométricos, polares y logarítmicos.

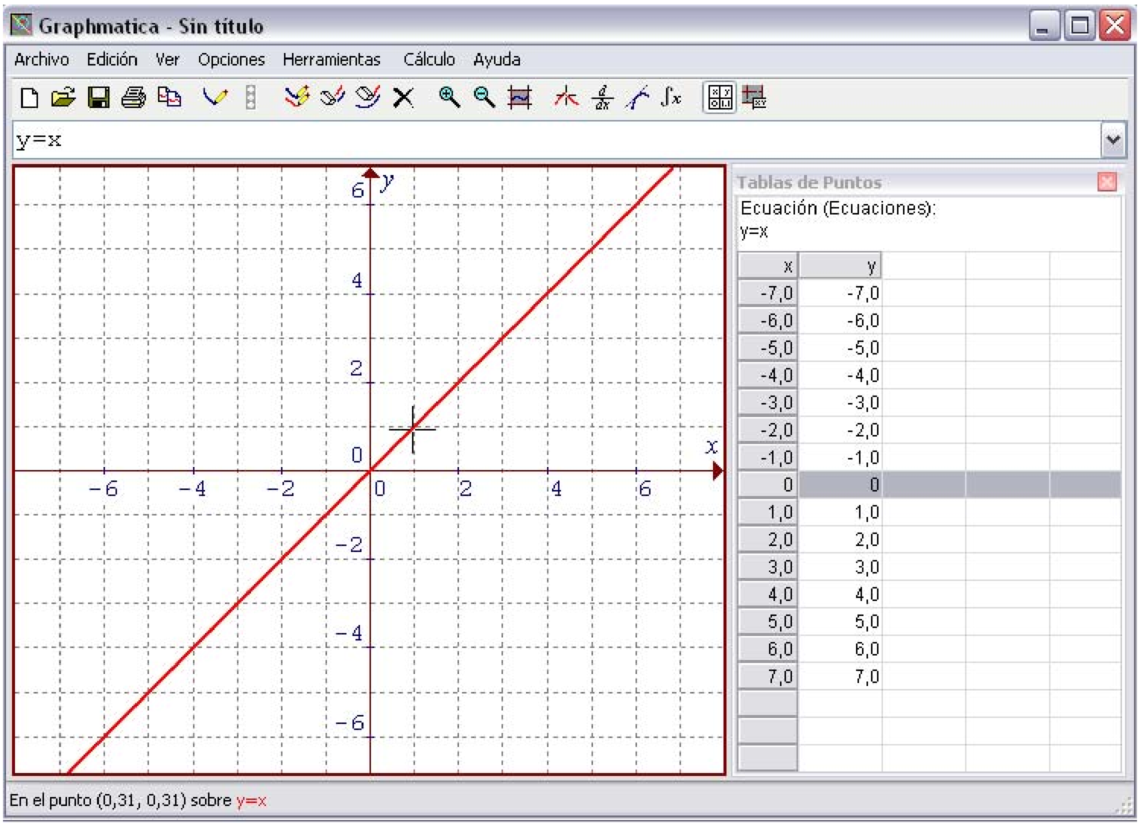
La opción mostrar tablas permite ver las coordenadas de los puntos de los gráficos.

Posee gran capacidad de cálculo numérico y simbólico. Encuentra derivadas, integrales y puntos críticos de cualquier función cartesiana.

Permite copiar ecuaciones, tablas de puntos y gráficos al portapapeles par poder ser impresos en color.

Cada opción automática es configurable por el usuario para personalizar los gráficos. El cuadro de diálogo Opciones de configuración nos muestra la configuración actual, Esta es guardada para ser restablecida en una nueva sesión. También existe la posibilidad de inhabilitar esta opción para guardar de forma manual.

En el gráfico siguiente podemos ver como esta aplicación permite mostrar simultáneamente la representación gráfica de la función y su tabla de valores.



Actividad 1.-

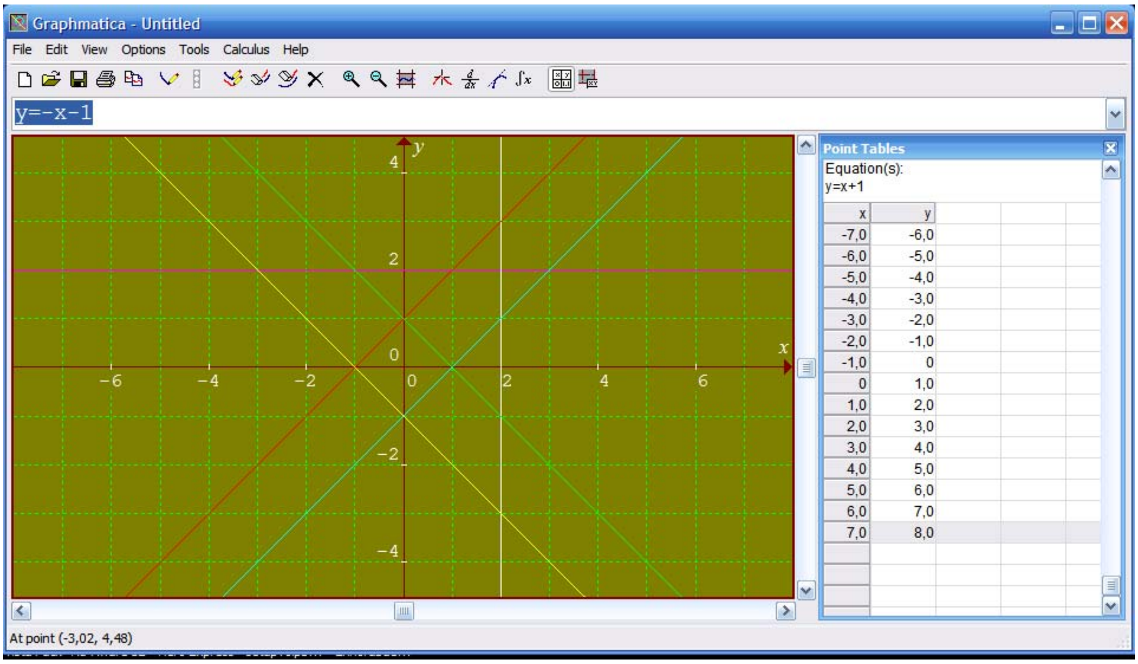
Represента las rectas de ecuaciones:

y=2	y=x-1	y=-x-1
x=2	y=x+1	y=-x+1

Descríbelas. ¿Cuáles son paralelas? ¿Qué rectas son paralelas a cuál? Compara las pendientes. Determina los puntos de corte con los ejes de coordenadas.

Orientaciones:

Escribe en Graphmática, en la barra que está situada inmediatamente debajo de la barra de herramientas, las ecuaciones tal y como se han indicado. Obtendrás una imagen como la que se presenta:



JCLIC.

Es un proyecto de software libre que el Departamento de Educación de la Generalitat de Cataluña pone a disposición de la comunidad bajo los términos de la Licencia Pública General de GNU (GPL). El código fuente de JClic está disponible en la plataforma de desarrollo.

Jclic es la evolución del programa Clic diseñado por Frances Busquets.

JClic es un entorno para la creación, realización y evaluación de actividades educativas multimedia. Está escrito en lenguaje Java por lo que es multiplataforma y el formato para almacenar los datos de las actividades es XML. El objetivo de este proyecto es hacer posible el uso de aplicaciones educativas multimedia en línea, directamente desde Internet.

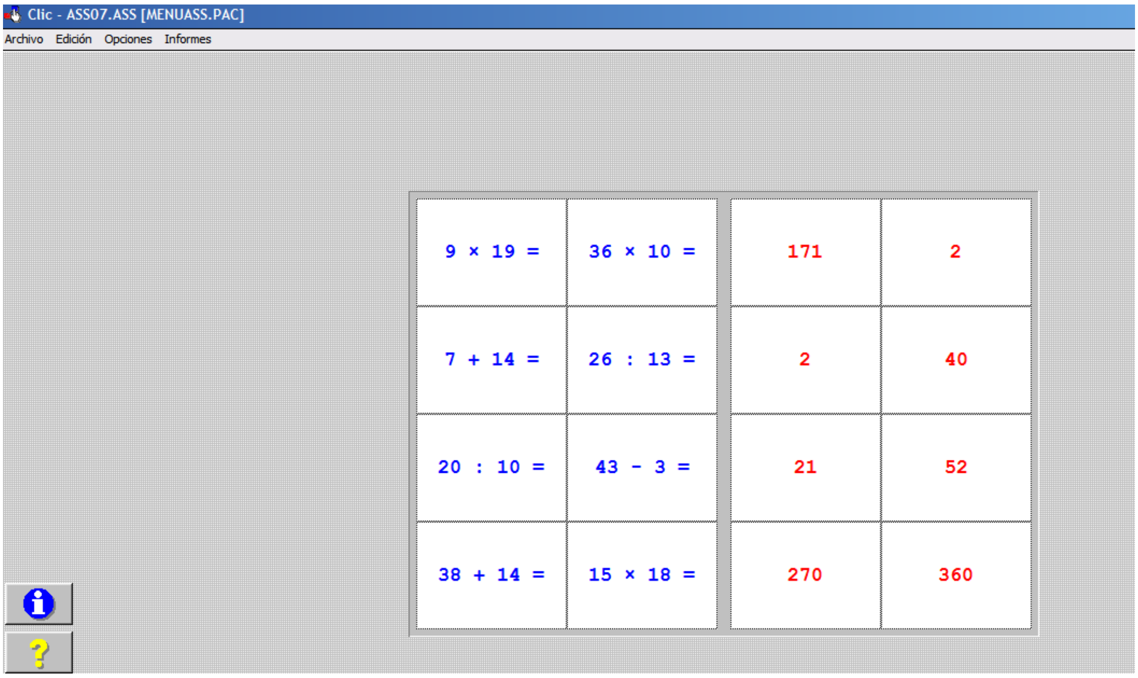
JClic está formado por un conjunto de aplicaciones informáticas que sirven para realizar diversos tipos de actividades educativas: rompecabezas, asociaciones, ejercicios de texto…

JClic lo componen cuatro aplicaciones: JClic applet, JClic player, JClic author, JClic reports. JClic author permite crear, editar y publicar las actividades. JClic player es un programa independiente que una vez instalado permite realizar las actividades desde el disco duro de la computadora y JClic reports es un módulo que recoge los datos y genera informes sobre los resultados de las actividades realizadas por los alumnos.

Actividad de cálculo mental.

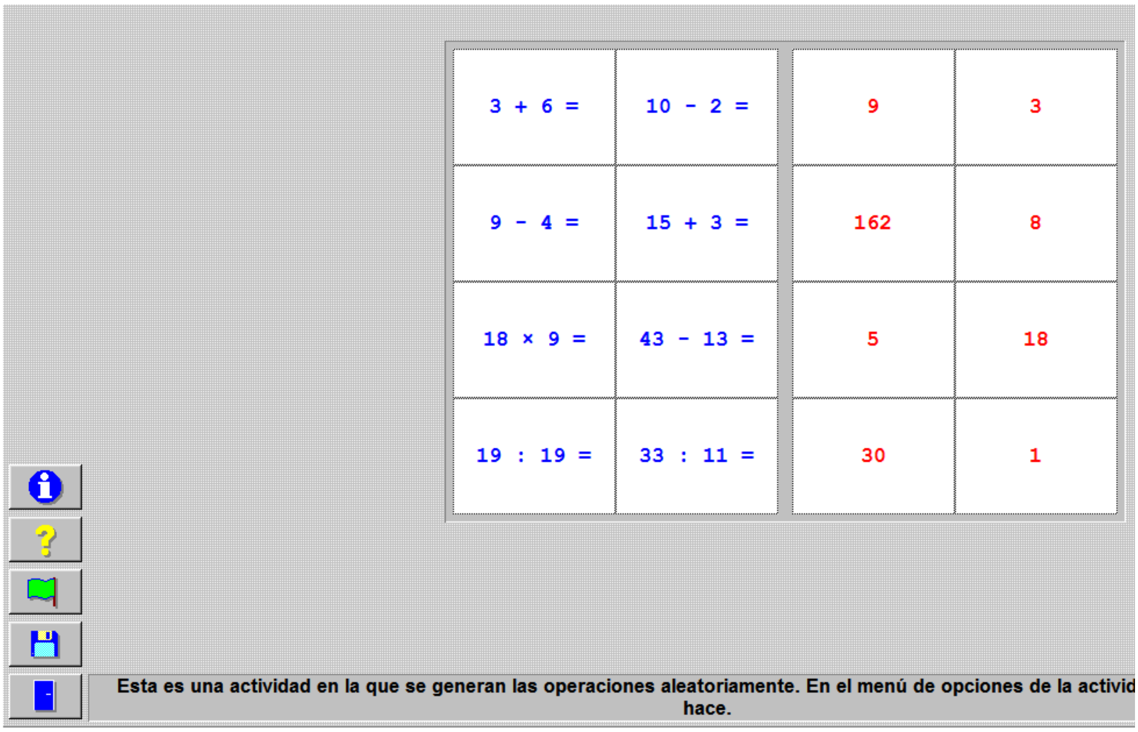
Las actividades de cálculo mental son de ese tipo de actividades que todos los profesores de cualquier departamento de matemáticas esta de acuerdo en que se deben realizar con frecuencia para que el alumnado desarrolle esta capacidad aunque a veces no se encuentran los momentos mas oportunos para llevarla a cabo. Podemos considerar que esta actividad realizada con clic podría ayudar a conseguir el logro de este objetivo.

La actividad que se muestra es una actividad de tipo asociación en la que se regeneran operaciones matemáticas aleatoriamente. En el menú opciones / opciones de la actividad se puede observar la sección de regeneración automática.

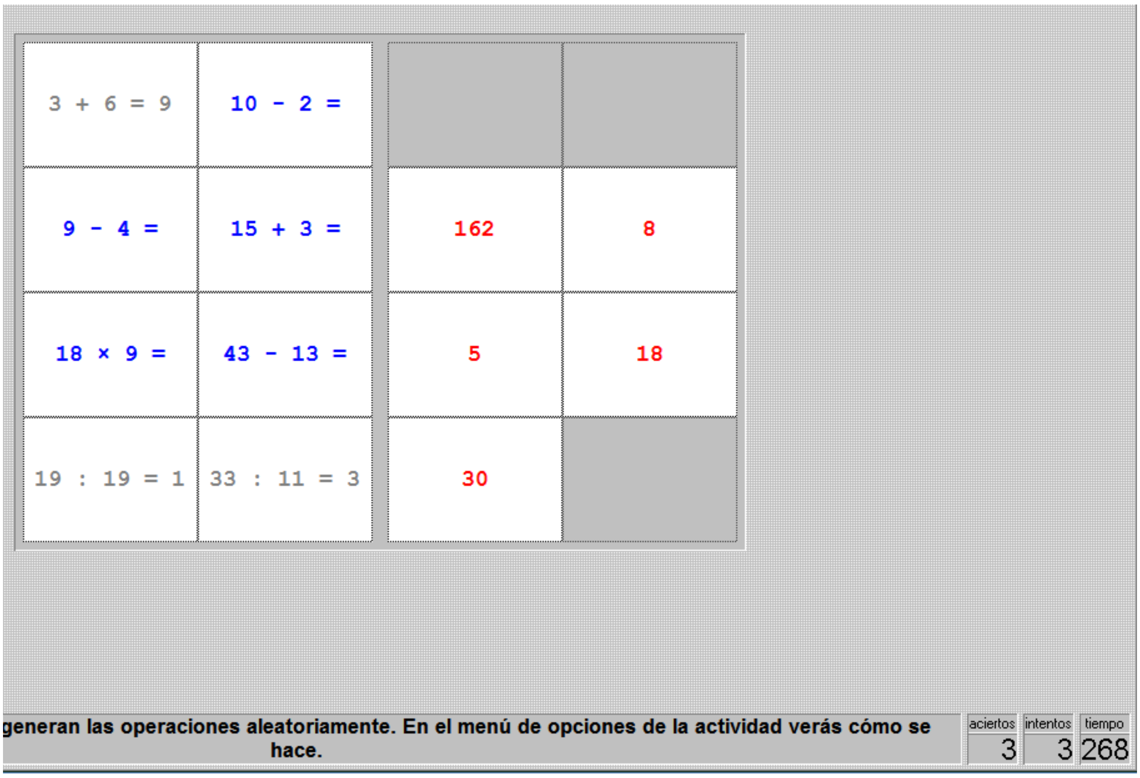


Se trata de unir una celda de la parte izquierda con la que corresponda de la parte derecha.

El icono “i” nos ofrece alguna información y el icono “?” nos ofrece ayuda. Cuando queramos regenerar la actividad debemos pinchar el icono de la “bandera verde” y cuando queramos guardar los resultados obtenidos por el alumno o alumna pincharemos en el icono que representa un “disquete”. Para salir de la actividad lo haremos pulsando con el ratón el icono “puerta”. Estos iconos se encuentran en la parte inferior izquierda de la pantalla.



El alumno irá uniendo por medio del ratón de su computadora una operación con un número. Es decir irá realizando las asociaciones oportunas y el programa irá registrando los intentos, los aciertos y el tiempo invertido en ello como se muestra en la parte inferior derecha de la pantalla siguiente.



Este tipo de actividades son de entrenamiento personal por lo que su realización ha de ser individual y se deben hacer con frecuencia durante algunos minutos.

Todas las actividades mostradas anteriormente pueden ser llevadas a cabo de forma individual por los alumnos y también pueden utilizarse con la ayuda de la pizarra digital o pizarra digital interactiva para ser expuestas y resueltas de forma colectiva por el conjunto de la clase.

Existen otras muchas aplicaciones y recursos disponibles en Internet (portales de matemáticas, web de profesores, blogs…) que pueden ser visitados, analizados, valorados y utilizados por la comunidad educativa.

ANEXO

ENTREMONTAÑA
en el aula

CUADERNOS DE MATEMÁTICAS

Departamento de Matemáticas
Instituto Español de Andorra

ESPECIFICACIONES DE LAS ACTIVIDADES

Artículo	Actividad	Competencias Básicas								Nivel			Gráf	Indi	Gru	Pauta
		CL	M	MF	DG	SC	CA	Ap	Au	Pri	1º	2º				
Matemáticas en la cocina	*Medir*	✓	✓					✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓
	Proporciones	✓	✓		✓			✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓
	Hacer receta	✓	✓	✓	✓			✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓		✓
	Comprar	✓	✓	✓	✓			✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓
	Buscar receta	✓	✓					✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓
De la Alhambra a la Margineda de la mano de Escher	*Motivación*	✓	✓		✓	✓	✓			✓	✓	✓	✓		✓	
	Actividad 1	✓	✓					✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓
	Actividad 2	✓	✓		✓	✓		✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓		✓
	Actividad 3	✓					✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	
	Actividad 4	✓	✓				✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓
	Exposición	✓	✓		✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓		✓	
Investigaciones en el aula de matemáticas	*Valor posición*		✓					✓	✓	✓	✓	✓	✓		✓	✓
	Agrupamientos		✓	✓				✓	✓	✓	✓		✓	✓	✓	✓
	El cero en Z		✓	✓					✓	✓	✓	✓	✓	✓		✓
	Polígono estrellado		✓				✓	✓	✓	✓	✓		✓		✓	✓
	Diagonales		✓		✓		✓	✓	✓	✓ ?	✓	✓	✓	✓	✓	✓
Materiales didácticos diversos	*Pesada desordenada*	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓
	Fracciones	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓
	Contar, contar y contar	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓		✓	✓	✓	✓
	Imágenes y conceptos	✓	✓	✓	✓		✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓

Artículo	Actividad	Competencias Básicas								Nivel			Gráf	Indi	Gru	Pauta
		CL	M	MF	DG	SC	CA	Ap	Au	Pri	1º	2º				
Longitud	**Comparación de longitudes.**	✔	✔	✔		✔	✔	✔	✔	✔	✔	✔	✔	✔	✔	✔
	Uso del compás	✔	✔	✔		✔	✔	✔	✔	✔	✔	✔	✔	✔	✔	✔
	Construcción de figuras con regla y compás	✔	✔	✔		✔	✔	✔	✔	✔	✔	✔	✔	✔	✔	✔
	Longitud y propiedades geométricas	✔	✔	✔		✔	✔	✔	✔	✔	✔	✔	✔	✔	✔	✔
	Perímetro y área	✔	✔	✔		✔	✔	✔	✔	✔	✔	✔	✔	✔	✔	✔
	Medida y unidad de medida	✔	✔	✔		✔	✔	✔	✔	✔	✔	✔	✔	✔	✔	✔
Ejemplo de aplicación de los algoritmos de cálculo de la aritmética egipcia en Educación Primaria y Secundaria	**Juegos con fichas egipcias.**		✔	✔			✔	✔	✔	✔	✔	✔	✔		✔	✔
	Juegos de identificación y lectura de números		✔	✔	✔		✔	✔	✔	✔	✔		✔	✔	✔	✔
	Juegos de habilidad operacional		✔	✔			✔	✔	✔	✔	✔	✔	✔	✔		✔
	Juegos de azar con dados		✔	✔			✔	✔	✔	✔	✔		✔		✔	✔

Artículo	Actividad	Competencias Básicas								Nivel			Gráf	Indi	Gru	Pauta
		CL	M	MF	DG	SC	CA	Ap	Au	Pri	1º	2º				
Las tecnologías de la Información y la Comunicación en la Educación: Recursos para la enseñanza y el aprendizaje de las Matemáticas.	**Hojas de cálculo: OpenCal y Excel. Estadística descriptiva, elaboración de una tabla y su gráfico.**	✓	✓	✓	✓	✓		✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓
	Wiris. Realización de distintas operaciones. Resolución de ecuaciones de primer grado. Representación gráfica.	✓	✓	✓	✓	✓		✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓
	Resolución de problemas con Wiris.	✓	✓	✓	✓	✓	✓		✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓
	Geogebra: Dibujar un cuadrado. Dibujar circunferencias de radios 1,2,3,4 y 5. Dibujar las parábolas que cortan al eje y en los puntos: -3,-2,-1,0,1,2,3.	✓	✓	✓	✓	✓	✓		✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓
	Graphmática: Representación de rectas.	✓	✓	✓	✓	✓	✓		✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓
	Jclic: Actividad de cálculo mental.	✓	✓	✓	✓	✓	✓		✓	✓	✓	✓	✓	✓		✓

Competencias Básicas:

CL : Comunicación Lingüística
M : Matemática
MF : Mundo Físico
DG : Información y Digital
SC : Social y Ciudadana
CA : Cultural y Artística
Ap : Aprender a Aprender
Au: Autonomía, Iniciativa personal

Nivel: **Pri** : Primaria **1º** : 1º de ESO **2º** : 2º de ESO

Gráf: Existencia o no de dibujos, gráficos, esquemas, tablas

Indi : Tarea **i**ndividual o con fases individuales

Gru : Tarea en grupo o con fases en grupo

Pauta : Se presenta con distintos niveles de dificultad y realización

DESCRIPTORES DE LAS ACTIVIDADES

Artículo	Actividad	Resumen	Contenido	Metodología	Materiales
Matemáticas en la cocina	*Unidades de Medida*	Estudio de los conceptos de magnitud y unidad de medida. Unidades del sistema decimal y unidades que no son del sistema decimal. Ventajas e inconvenientes del sistema decimal	Magnitudes y unidades de medida. Sistema métrico decimal y otras unidades de medida.	De forma individual utilizando recetas de cocina, se relacionan magnitudes con su unidad de medida. En grupos se discute las ventajas de utilizar un sistema de unidades o utilizar otro, guiados por el profesor.	Recetas de cocina
	Proporciones	Cálculo de la cantidad de cada ingrediente que se necesita para realizar la receta dependiendo del número de comensales.	Magnitudes directamente proporcionales.	En pequeños grupos se pretende que los alumnos descubran cómo se relacionan las magnitudes directamente proporcionales. De forma progresiva se aumenta la dificultad (primero cálculos de dobles y mitades, después otros)	Recetas de cocina
	Hacer la compra	Aplicación de las proporciones para relacionar precios y cantidad de producto.	Magnitudes directamente proporcionales. Unidades de medida. Organización de la información en tablas.	Recoger y organizar información de las tiendas sobre precios y cantidad de alimento. Elaborar tablas para analizar esa información.	Recetas de cocina
	Elaborar la receta	Elaborar una receta de cocina.	Comprensión de textos, procedimientos, organización del trabajo, orden.	Trabajo individual del alumno en colaboración con las familias y posterior análisis y puesta en común con los compañeros en el aula.	Recetas de cocina

Artículo	Actividad	Resumen	Contenido	Metodología	Materiales
De La Alhambra a La Margineda de la mano de Escher		Actividades guiadas para crear mosaicos inspirados en los nazaríes de la Alhambra y en los diseñados por el artista gráfico M.C. Escher.	Polígonos regulares que teselan el plano, cálculo de los ángulos interiores de los polígonos regulares. Aproximación, de manera intuitiva, a los movimientos en el plano. Distintas técnicas de creación de mosaicos en función del polígono base. Creación de mosaicos: diseñar la tesela, rellenar con ella el plano y dar color.	Se combinan las explicaciones del profesor, con las pequeñas investigaciones tanto de manera individual como en grupo. La creación del mosaico es una actividad individual pero compartida e influenciada por la ayuda y los comentarios de todos los compañeros. La finalidad de cada actividad individual es la inclusión en una exposición, que es una actividad conjunta y final de todo el grupo.	Materiales de dibujo (regla, compás, transportador de ángulos...) tramas triangulares, cuadradas y hexagonales (se incluyen como anexo en la actividad), tijeras, papel DIN A3, colores (rotuladores, lápices...), cartulinas de colores, celo y pegamento.

Artículo	Actividad	Resumen	Contenido	Metodología	Materiales
Investigaciones en el aula de matemáticas	*Valor posición*	Se centra la atención en la importancia del valor de posición de las cifras en un número. Este valor distinto repercute en los resultados de la multiplicación en la que interviene dicho número.	Valor de posición de las cifras. Multiplicación.	El profesor muestra ejemplos y motiva el sentido del problema. Debate y valoración de ideas en pequeños grupos (de 3 a 4 alumnos): ensayo-error. Intervenciones de los grupos que exponen sugerencias. El profesor modela las intervenciones e interviene para encauzar el debate. Uso de calculadora y creación de tablas-control.	Calculadora, papel y lápiz
	Agrupamientos	Se trata de percibir que la divisibilidad es algo excepcional para números grandes, de reconocer el papel del resto en la división: la división como agrupamiento de cantidades fijadas, y entender los distintos órdenes de unidad con bases distintas.	Divisibilidad Resto de la división. Agrupamientos distintos del decimal.	En primaria, importante construir modelos de agrupamiento (dibujos), así como recopilación de material manipulable como por ejemplo canicas, cubiletes de dado, cajitas planas, cajas con profundidad y bolsas . Inicialmente, la comprensión individual a partir de pautas del profesor. Trabajo manipulativo en grupo pequeño (3 o 4), y posterior exposición razonada de la solución. Debate en gran grupo para validar la solución.	Canicas, cubiletes de dado, cajitas planas, cajas con profundidad, bolsas, esparadrapo, cartulinas,rotulador
		La investigación ha de procurar la	El cero de $\mathbb{Z}$ Simetría en $\mathbb{Z}$	Construcción de cartulinas de gráficos sin escala, así	Cartulina, rotulador regla-bastidor, lápiz

Investigaciones en el aula de matemáticas	*El cero en $\mathbb{Z}$*	conceptualización del cero como referencia de $\mathbb{Z}$, la simetría de $\mathbb{Z}$, y las operaciones de suma y resta. El cambio de referencia desde el cero a otro valor promueve nuevos valores que dan sentido a las operaciones	Operaciones de suma y resta	como habilitar una regla-bastidor. El profesor presenta el problema y cada alumno propone soluciones a partir de una escala y puntos aproximados. En secundaria serán valores concretos. Debate en gran grupo para validar soluciones propuestas.	y papel, y calculadora (secundaria)
	Polígon estrell	El trazado de estos polígonos especiales permite indagar acerca de la relación entre el número de vértices y el tamaño del salto para trazar los lados. Es una relación numérica (primos entre sí) que admite varias aproximaciones más o menos factibles. Es un juego gráfico y numérico muy enriquecedor de las relaciones numéricas básicas.	Trazado de polígonos Relaciones numéricas de múltiplo-divisor Números primos entre sí	Explicación del problema y de la noción por parte del profesor En grupos pequeños los alumnos promueven posibles soluciones. En gran grupo, el profesor apunta contraejemplos, y los alumnos intentan también buscar otros contraejemplos. Los grupos vuelven a intentarlo. En primaria, el profesor debe de hablar de divisores comunes, y en secundaria debe inducir el uso de las nociones implicadas en la solución. En cualquier caso, debate abierto en gran grupo. En secundaria se deben trazar polígonos regulares.	Material de dibujo. Lápiz y papel.
		La clasificación de los cuadriláteros está	Elementos básicos de Geometría:	El profesor presenta la clasificación inicial, y cada	Material de dibujo. Software de

Investigaciones en el aula de matemáticas	*Diagonales*	en el centro de casi cualquier otra actividad posterior de Geometría. Además, asienta los conceptos más elementales, y es el prototipo de razonamiento matemático. El uso de software en Secundaria agiliza la comprensión.	punto, segmento, recta, perpendicularidad y paralelismo, ángulos y tipos, etc. Tipos de cuadriláteros. Manejo de Software de Geometría.	alumno debe de completar la tabla a partir de los elementos añadidos de ángulo. En grupo pequeño debaten sus propuestas, y elaboran las representaciones gráficas de trazados de los ejemplos que componen su propuesta. Las presentan y se debate en gran grupo. El profesor valida las propuestas. En Secundaria, los pequeños grupos crean en software estas representaciones, y posteriormente, con las indicaciones del profesor, se realiza la actividad de dinamizar y modificar las figuras para observar el papel de las diagonales.	Geometría

Artículo	Actividad	Resumen	Contenido	Metodología	Materiales
Materiales didácticos diversos	*Pesada desordenada*	Ordenar la secuencia desordenada de una pesada.	Trabajo en grupo y respeto a las normas establecidas. Observación. Secuenciación. Razonamiento. Exposición de motivos. Toma de decisiones. Revisión. Respeto a reglas. Medida	La metodología debe ser participativa. El profesor deberá adecuar los métodos a las características particulares de cada grupo. Se recomienda el trabajo en grupo, los debates y demás formas de participación que fomente el intercambio de conocimientos e información. En el mismo desarrollo de las actividades se deben incluir intervenciones de recuperación y de ampliación. Las propuestas de trabajo, individuales o en grupo, deberán ser, dentro de lo posible, abiertas.	Material elaborado. Calculadora.
	Fracciones	Completar fichas relativas a fracciones mediante elementos matemáticos y de lenguaje	Conceptos relativos a fracciones. Observación. Trabajo en grupo y respeto a las normas establecidas. Expresión oral y escrita.	La metodología debe ser participativa. El profesor deberá adecuar los métodos a las características particulares de cada grupo. Se recomienda el trabajo en grupo, los debates y demás formas de participación que fomente el intercambio de conocimientos e información. En el mismo desarrollo de las actividades se deben incluir intervenciones de recuperación y de ampliación. Las propuestas de trabajo, individuales o en grupo, deberán ser, dentro de lo posible, abiertas.	Material elaborado. Calculadora.

Materiales didácticos diversos	*Fracciones*	Completar fichas relativas a fracciones mediante elementos matemáticos y de lenguaje	Conceptos relativos a fracciones. Observación. Trabajo en grupo y respeto a las normas establecidas. Expresión oral y escrita.	La metodología debe ser participativa. El profesor deberá adecuar los métodos a las características particulares de cada grupo. Se recomienda el trabajo en grupo, los debates y demás formas de participación que fomente el intercambio de conocimientos e información. En el mismo desarrollo de las actividades se deben incluir intervenciones de recuperación y de ampliación. Las propuestas de trabajo, individuales o en grupo, deberán ser, dentro de lo posible, abiertas.	Material elaborado. Calculadora.
	Contar, contar y contar	Actividades de escritura de números a partir de las cantidades consideradas y viceversa.	Sistema de numeración decimal. Trabajo en grupo y respeto a las normas establecidas. Establecimiento y uso de estrategias.	La metodología debe ser participativa. El profesor deberá adecuar los métodos a las características particulares de cada grupo. Se recomienda el trabajo en grupo, los debates y demás formas de participación que fomente el intercambio de conocimientos e información. En el mismo desarrollo de las actividades se deben incluir intervenciones de recuperación y de ampliación. Las propuestas de trabajo, individuales o en grupo, deberán ser, dentro de lo posible, abiertas.	Material elaborado. Calculadora. Lápices de colores.
	Imágenes y conceptos	Presentación de conceptos (múltiplo, divisor y divisible)	Asimilación de conceptos. Observación de	La metodología debe ser participativa. El profesor deberá adecuar los	Material elaborado. Calculadora.

Materiales didácticos diversos				dentro de lo posible, abiertas.	
	Contar, contar y contar	Actividades de escritura de números a partir de las cantidades consideradas y viceversa.	Sistema de numeración decimal. Trabajo en grupo y respeto a las normas establecidas. Establecimiento y uso de estrategias.	La metodología debe ser participativa. El profesor deberá adecuar los métodos a las características particulares de cada grupo. Se recomienda el trabajo en grupo, los debates y demás formas de participación que fomente el intercambio de conocimientos e información. En el mismo desarrollo de las actividades se deben incluir intervenciones de recuperación y de ampliación. Las propuestas de trabajo, individuales o en grupo, deberán ser, dentro de lo posible, abiertas.	Material elaborado. Calculadora. Lápices de colores.
	Imágenes y conceptos	Presentación de conceptos (múltiplo, divisor y divisible) relacionándolos con imágenes que representen dichos conceptos	Asimilación de conceptos. Observación de conceptos matemáticos en situaciones familiares para el alumno. Trabajo en grupo y respeto a las normas establecidas. Expresión oral y escrita.	La metodología debe ser participativa. El profesor deberá adecuar los métodos a las características particulares de cada grupo. Se recomienda el trabajo en grupo, los debates y demás formas de participación que fomente el intercambio de conocimientos e información. En el mismo desarrollo de las actividades se deben incluir intervenciones de recuperación y de ampliación. Las propuestas de trabajo, individuales o en grupo, deberán ser, dentro de lo posible, abiertas.	Material elaborado. Calculadora.
	Vida cotidiana	Presentación de supuestos abiertos	Uso de las Matemáticas	La metodología debe ser participativa.	Material elaborado. Calculadora.

Materiales didácticos diversos		de la vida cotidiana.	para la resolución de situaciones de la vida cotidiana. Trabajo en grupo y respeto a las normas establecidas. Expresión oral y escrita. Toma de decisiones. Cálculos. Razonamiento. Expresión oral y escrita.	El profesor deberá adecuar los métodos a las características particulares de cada grupo. Se recomienda el trabajo en grupo, los debates y demás formas de participación que fomente el intercambio de conocimientos e información. En el mismo desarrollo de las actividades se deben incluir intervenciones de recuperación y de ampliación. Las propuestas de trabajo, individuales o en grupo, deberán ser, dentro de lo posible, abiertas.	Cartulina. Lápices de colores. Etc.
	Clave secreta	Descifrar la clave que relaciona biunívocamente diez letras con las diez cifras del sistema de numeración decimal	Trabajo en grupo y respeto a las normas establecidas. Razonamiento. Pruebas suposición-ensayo-verificación. Establecimiento y uso de estrategias varias.	La metodología debe ser participativa. El profesor deberá adecuar los métodos a las características particulares de cada grupo. Se recomienda el trabajo en grupo, los debates y demás formas de participación que fomente el intercambio de conocimientos e información. En el mismo desarrollo de las actividades se deben incluir intervenciones de recuperación y de ampliación. Las propuestas de trabajo, individuales o en grupo, deberán ser, dentro de lo posible, abiertas.	Material elaborado.
	Taller de Matemáticas	Diversas actividades de carácter geométrico desarrolladas en la	Trabajo en grupo y respeto a las normas establecidas.	La metodología debe ser participativa. El profesor deberá adecuar los métodos a las características	Material elaborado. Calculadora. Etc.

		materia de Taller de Matemáticas de 4º de ESO	Elementos geométricos y algebraicos varios. Manipulación. Cálculos. Imaginación. Creatividad.	particulares de cada grupo. Se recomienda el trabajo en grupo, los debates y demás formas de participación que fomente el intercambio de conocimientos e información. En el mismo desarrollo de las actividades se deben incluir intervenciones de recuperación y de ampliación. Las propuestas de trabajo, individuales o en grupo, deberán ser, dentro de lo posible, abiertas.	

Artículo	Actividad	Resumen	Contenido	Metodología
Longitud y medida	Conjunto de actividades que tratan del concepto de longitud en diferentes situaciones, y de su medida a partir de la comparación mediante observación directa, iteración y transitividad, sin hacer uso de instrumentos graduados.	Línea, segmentos rectilíneos y curvilíneos, distancia, altura, perímetro y área. Equidistancia y simetría. Perpendicularidad, polígonos regulares e irregulares, figuras inscritas y circunscritas a una circunferencia. Descomposición de un número en sumandos. Cálculo de los divisores de un número. Unidad de medida y equivalencias.	Las actividades están organizadas para ser desarrolladas por los alumnos, trabajando individualmente o en grupo pequeño. Después de cada actividad se debe hacer una puesta en común que permita a los alumnos, dirigidos y orientados por el profesor, extraer y escribir sus conclusiones, utilizando el vocabulario apropiado. Las propuestas que se presentan admiten diversos grados de ampliación, tanto en sus contenidos como en el número de ejercicios similares a los propuestos que los alumnos deban realizar para asimilar los conceptos y procedimientos expuestos.	Instrumentos de dibujo no graduados, compás, lápiz, borrador, papel calco, hilo, pegamento, tijeras, cartón, etc.

Artículo	Actividad	Resumen	Contenido	Metodología	Materiales
Ejemplo de aplicación de los algoritmos de cálculo de la aritmética egipcia en Educación Primaria y Secundaria	**Juegos con fichas egipcias.**	Construcción de fichas con los diferentes símbolos numéricos que se van a utilizar.	Conocer los símbolos jeroglíficos que se utilizaban en la representación numérica	Se fotocopian en cartulinas las hojas del apéndice 1 y se procede a recortar las fichas. El profesor muestra el valor de cada símbolo, explica como se colocan y agrupan para construir números. Los alumnos cogen grupos de fichas y los ordenan de menor a mayor valor.	Cartulinas de diferentes colores, pegamento, tijeras.
	Juegos de identificación y lectura de números	Escritura e identificación de los números utilizando las fichas con los símbolos numéricos.	Representación numérica utilizando los símbolos jeroglíficos y su posterior identificación. Distinguir las diversas cantidades, el mayor y el menor de dos números.	Una vez fotocopiadas y recortadas suficientes fichas para poder trabajar con ellas, se cogen grupos de fichas, se colocan en el orden correspondiente y, finalmente, se indica su valor numérico. Este proceso se repite el número de veces necesario hasta que los alumnos se familiaricen en la identificación de los números que se forman.	
	Juegos de habilidad operacional	Práctica de los algoritmos egipcios para realizar las operaciones con números expresados con los símbolos jeroglíficos	Sumar, restar, multiplicar y dividir números siguiendo los algoritmos específicos. Expresar una fracción como suma de fracciones unitarias.	El profesor muestra los algoritmos utilizados para cada una de las operaciones aritméticas. Los alumnos proceden a coger grupos de fichas y así forman cada operando. Finalmente pasan a seguir los algoritmos indicados para obtener el resultado de las diferentes operaciones.	
	Juegos de azar con dados	Construcción de dados con los símbolos de los números jeroglíficos. Descripción de diversos		Los alumnos fotocopian en cartulinas suficientes hojas de los apéndices 2 y 3 para construir los dados necesarios. A continuación los	Cartulinas de diferentes colores, pegamento, tijeras.

		juegos de azar con dados.		recortan, doblan por las aristas y pegan las solapas de los bordes. El profesor muestra diferentes juegos de azar con dados. Una vez construidos los dados, los alumnos practican los diferentes juegos mostrados.	

Artículo	Actividad	Resumen	Contenido	Metodología
Las tecnologías de la Información y la Comunicación en la Educación: Recursos para la enseñanza y el aprendizaje de las Matemáticas.		Actividades a realizar con aplicaciones de software libre diseñadas para desarrollar la competencia matemática.	Elaboración de tablas y gráficos estadísticos con OpenCal y Excel. Realización de operaciones con Wiris. Resolución de ecuaciones de primer grado y de sistemas de dos ecuaciones con Wiris. Resolución de problemas con Wiris. Geogebra: Dibujar un cuadrado. Dibujar circunferencias de radios 1,2,3,4 y 5. Dibujar las parábolas que cortan al eje y, en los puntos -3,-2, -1,0,1,2,3. Graphmática: Representación de recas. Jclic: Actividad de cálculo mental.	Se complementan las explicaciones del profesor con el trabajo en pequeño grupo, el trabajo individual y las exposiciones de las actividades por parte de los alumnos a la clase. Todas las actividades mostradas en este artículo pueden ser llevadas a cabo de forma individual por los alumnos y también pueden utilizarse, con la ayuda de la pizarra digital o de la pizarra digital interactiva, para ser expuestas y resueltas de forma colectiva por el conjunto de la clase.